

Um die wesenhaft-sachliche Überbrückung gerade dieses Tatbestandes handelt es sich. Warum und wiefern muß der Existenzbesitz auf einen einzigen Punkt reduziert bleiben? Um dies nun endgültig zu beantworten, müssen wir jetzt ontisch eine Stufe tiefer steigen. Was ist Zeit? Wo liegt ihr letzter formaler Quellpunkt?

[Fortsetzung folgt.]

ÜBER DIE LÖSUNG VON PARADOXIEN

Von PAUL FINSLER-Zürich

Die Antinomien der Mengenlehre und ähnliche damit zusammenhängende Paradoxien sind schon vielfach Gegenstand von Erörterungen gewesen, ohne daß es doch gelungen wäre, in der Erklärung derselben eine volle Einigung zu erzielen. Da aber diese Dinge für die Grundlegung der Mathematik von besonderer Bedeutung sind, so folge ich gerne einer Aufforderung des Herausgebers dieser Zeitschrift, um von mathematischem Standpunkte aus zu einer Abhandlung Stellung zu nehmen, die Herr Lipps unter dem Titel „Die Paradoxien der Mengenlehre“ im Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung¹⁾ veröffentlicht hat.

Herr Lipps hat es in seiner Untersuchung, wie er sagt, auf eine Lösung der Paradoxien abgesehen, mit denen die Mengenlehre belastet ist, und er stellt sich damit auf den Standpunkt, daß dieselben einer Lösung bedürftig und fähig sind. Diesen Standpunkt muß man m. E. als Mathematiker ebenfalls einnehmen. Jede Unstimmigkeit in der reinen Mathematik oder in der Logik gefährdet den ganzen Bestand der Wissenschaft und muß deshalb aufgeklärt und beseitigt werden. Diese Aufgabe kann schwierig, aber doch nicht unlösbar sein, denn, wenn es auch Probleme geben kann, denen die menschlichen Hilfsmittel nicht gewachsen sind, so kann doch die Aufgabe, in einer vorliegenden, offenbar falschen Überlegung den Fehler aufzudecken, nicht dazu gehören, es muß vielmehr in diesem Falle die Lösung sich erzwingen lassen.

Freilich besteht hier die große Gefahr, daß man sich mit der Auffindung eines wirklichen oder auch nur vermeintlichen Fehlers zufrieden gibt und die Frage als gelöst betrachtet, ohne doch den wahren Kern der Sache getroffen zu haben. Die

1) Bd. 6 (1923) S. 561–571.

Widersprüche werden sich dann bei genauerer Untersuchung doch wieder geltend machen. Man wird deshalb an eine wirkliche Lösung strengere Anforderungen zu stellen haben. Vor allem darf eine solche nichts wesentlich Willkürliches an sich tragen, sondern sie muß sich in eindeutiger Weise aus der Aufgabe selbst ergeben. Eine Auflösung von Widersprüchen kann daher auch nicht in philosophischen Erörterungen allgemeiner Art gefunden werden, sondern nur in logischen Schlußfolgerungen, die aber bedingen, daß die Begriffe, um die es sich handelt, genau festgelegt sind.

Ich möchte nun einige der Paradoxien besprechen, indem ich kurz die wichtigsten Punkte angebe, in denen ich dem Verfasser der genannten Abhandlung nicht zustimmen kann, und die Erklärung hinzufüge, die ich für die richtige halte.

Ein Wort heißt autologisch, wenn ihm seine Bedeutung als Merkmal zukommt, es heißt heterologisch in jedem andern Fall. So ist das Wort kurz autologisch, das Wort lang dagegen heterologisch. Ist nun das Wort heterologisch selbst autologisch oder heterologisch? Beide Annahmen führen zum Widerspruch.

Herr Lipps sucht die Erklärung darin, daß es sich hier nicht um Eigenschaften von Wörtern handle. Aber weshalb soll es nicht eine Eigenschaft eines Wortes sein, daß ihm seine Bedeutung als Merkmal zukommt? Wenn die Prädikationen „Kurz ist kurz“ und „Dreisilbig ist dreisilbig“ eine gemeinsame Eigenschaft besitzen, so haben auch die Wörter kurz und dreisilbig selbst eine gemeinsame Eigenschaft, nämlich die, daß ihnen derartige Prädikationen zugeordnet sind.

Wir wollen, um diesen Punkt zu klären, untersuchen, was man unter einer „Eigenschaft“ zu verstehen hat. Man erkennt zunächst, daß auch beliebig ungleichartige Dinge gemeinsame Eigenschaften besitzen können. So haben die Europäer und der Sirius die gemeinsame Eigenschaft, zu Beginn dieses Satzes erwähnt zu sein, und sie unterscheiden sich dadurch von allen andern „Dingen“. Allgemein muß es in einem beliebigen Bereich von Dingen mindestens ebensoviele Eigenschaften geben, als es „Mengen“ von solchen Dingen gibt, denn jeder Menge entspricht eine Eigenschaft ihrer Elemente, nämlich die, gerade dieser Menge als Element anzugehören. Zusammen mit weiteren Forderungen, die man an den Begriff Eigenschaft zu stellen hat, kommt man zu folgender Definition: Alles das ist als Eigenschaft zu bezeich-

nen, was in einem gegebenen Bereich von Dingen jedem Ding entweder zukommt oder nicht zukommt. Jede Eigenschaft muß also die Dinge des Bereichs eindeutig einteilen in solche, denen sie zukommt, und solche, denen sie nicht zukommt; und umgekehrt ist alles das, was eine derartige Einteilung hervorruft, als Eigenschaft zu bezeichnen. Die Einteilung braucht aber nur für den vorgelegten Bereich von Dingen bestimmt zu sein, außerhalb dieses Bereichs ist dann die Eigenschaft „sinnlos“ oder „nicht erklärt“.

Andere Definitionen, die man für den Begriff Eigenschaft geben könnte, lassen sich, wenn sie genügend scharf sind, auf die hier gegebene zurückführen. Den Eigenschaften im „anschaulichen“ Sinn haftet meist noch eine Unbestimmtheit an, die (wenigstens ideell) durch eine eindeutige Festsetzung in den zweifelhaften Fällen oder durch Einschränkung des Bereichs der betrachteten Dinge behoben werden kann.

Wenn man also von einer bestimmten Eigenschaft reden will, so muß aus der Definition der Eigenschaft eindeutig hervorgehen, welchen Dingen sie zukommt und welchen nicht. Mehr braucht man aber von der Definition nicht zu verlangen, denn es hindert nichts, „umfangsgleiche“ Eigenschaften, d. h. solche, welche denselben Dingen zukommen und denselben Dingen nicht zukommen, vom rein logischen Standpunkt aus als identisch zu betrachten. So ist z. B. für die positiven geraden Zahlen logisch genommen die Eigenschaft, „Primzahl“ zu sein, identisch mit der Eigenschaft „kleiner als vier“ zu sein, und mit der Eigenschaft „gleich zwei“ zu sein. Im Bereich aller Zahlen werden aber durch die angeführten Worte verschiedene Eigenschaften bezeichnet.

Wie steht es nun mit den Begriffen „autologisch“ und „heterologisch“? Werden durch sie bestimmte Eigenschaften von Wörtern ausgedrückt oder nicht? Wir müssen uns bei der Untersuchung streng an die Definition der Begriffe halten, da sie eben lediglich durch die dafür gegebene Definition bestimmt sind und nicht an sich schon eine bestimmte Bedeutung haben.

Betrachten wir zunächst die drei Wörter kurz, dreisilbig, lang. Von diesen sind der Definition zufolge die beiden ersten autologisch, das letzte heterologisch; im Bereich der drei Wörter handelt es sich also um wohlbestimmte Eigenschaften.

Für andere Dinge als für Wörter, z. B. für einzelne Buchstaben, sind die fraglichen Eigenschaften nicht erklärt. Es hat aber zunächst den Anschein, als ob sie im Bereich aller Wörter erklärt wären, also für beliebige Wörter einen eindeutigen Sinn haben müßten. Dies ist aber nicht der Fall.

Um zu wissen, ob einem Wort seine Bedeutung als Merkmal zukommt oder nicht, muß man die Bedeutung des Wortes nicht nur in gewissen einzelnen Fällen, sondern speziell auch in Bezug auf das Wort selbst schon kennen. Bei den Wörtern autologisch und heterologisch ist aber diese Bedeutung vermöge der Definition in zirkelhafter Weise von dieser Bedeutung selbst abhängig gemacht und dieser Zirkel läßt sich im ersten Fall zwar erfüllen, aber nicht eindeutig; im zweiten Fall ist er überhaupt nicht erfüllbar. Die Definition liefert also nicht für jedes beliebige Wort ein eindeutiges Resultat, und deshalb, und nur deshalb handelt es sich hier nicht um Eigenschaften, die im Bereich aller Wörter einen bestimmten Sinn haben. Will man aber mit den Wörtern autologisch und heterologisch Eigenschaften bezeichnen, die auch für diese Wörter selbst erklärt sind, so ist dazu eine besondere, eindeutige Festsetzung notwendig. Man kann z. B. festsetzen, die beiden Wörter sollen ohne Rücksicht auf die frühere Vorschrift eindeutig heterologisch sein. In diesem Fall hat das Wort heterologisch zwar die Eigenschaft, daß ihm seine Bedeutung als Merkmal zukommt, aber es hat nicht die Eigenschaft, autologisch zu sein.

Zusammenfassend sehen wir: Eine Eigenschaft ist nur durch die dafür gegebene Definition bestimmt und hat deshalb auch nur für solche Dinge einen Sinn, für welche die Definition ein eindeutiges Resultat ergibt. Daß die zu Anfang gegebene Definition nicht auf beliebige Wörter angewendet werden kann, rührt von einem in der Definition enthaltenen Zirkel her.

Wenn man also sagt: Es ist unmöglich, daß einem Ding eine Eigenschaft weder zukommt noch nicht zukommt, so ist dies nicht etwa ein evidenter Satz, sondern lediglich eine reine Festsetzung oder eine Forderung, die man an den Begriff „Eigenschaft“ stellt, und es ist durchaus nicht notwendig, daß diese Forderung für alle Dinge aufgestellt wird, sondern man kann, wie wir es getan haben, auch dann von Eigenschaften sprechen, wenn die Forderung nur in einem bestimmten Bereich von Dingen erfüllt ist.

Andere Paradoxien sind nun ganz in derselben Weise zu behandeln. Daß die Prädikate denkbar und abstrakt beide von sich selbst ausgesagt werden können, ist sehr wohl eine den beiden Prädikaten gemeinsame Eigenschaft. Wenn man aber alle Prädikate, die von sich selbst ausgesagt werden können, als prädikabel bezeichnet, alle andern dagegen als imprädikabel, so werden dadurch zwei Eigenschaften und zugleich zwei Prädikate definiert, die nicht, wie es zunächst den Anschein hat, auf ganz beliebige Prädikate angewendet werden können. Da nämlich die Definition infolge eines Zirkels für die Prädikate prädikabel und imprädikabel selbst kein eindeutiges Resultat ergibt, so ist, wenn die Prädikate auch hierfür erklärt sein sollen, noch eine besondere Festsetzung notwendig. Eine Eigenschaft „imprädikabel“, die für alle Prädikate der obigen Definition genügt, gibt es nicht. Man kann zwar sagen, daß das Prädikat imprädikabel, wenn nur die obige Definition dafür gegeben ist, nicht von sich selbst ausgesagt werden kann, weil eben die Definition hier keinen Sinn ergibt. Daraus folgt aber nicht, daß es nun doch imprädikabel wäre; die Definition von imprädikabel würde dies zwar verlangen, wenn sie hier einen Sinn hätte, da sie aber zugleich das Gegenteil davon verlangt, so bleibt sie sinnlos und kann deshalb auf dieses Prädikat nicht angewendet werden.

Auch die „Paradoxie der endlichen Bezeichnung“ beruht auf einer zirkelhaften Definition. Jede Zahl ist entweder endlich darstellbar oder nicht, sofern, was wir annehmen wollen, der Begriff der „endlichen Darstellbarkeit“ eindeutig festgelegt ist. Das Cantorsche Diagonalverfahren gibt nun eine Methode, um aus den endlich darstellbaren Zahlen eine bestimmte, nicht endlich darstellbare Zahl abzuleiten. Durch die vollständige Angabe der Definition dieser Zahl scheint dieselbe doch endlich dargestellt zu sein.

Dies ist jedoch nicht der Fall, denn die Definition verlangt, wenn sie in endlicher Darstellung gegeben wird, von der zu definierenden Zahl etwas Unmögliches, nämlich, daß sie einerseits nicht zu den endlich darstellbaren Zahlen gehören, andererseits aber durch die gegebene Darstellung doch endlich dargestellt sein soll. Einer solchen Definition kann aber keine Zahl genügen. Wird jedoch die Definition rein gedanklich gefaßt, so daß sie als solche nicht „in endlicher Darstellung“ vorliegt, so

ist sie einwandfrei und gegen die Existenz der betreffenden Zahl ist nichts einzuwenden.¹⁾

Wir betrachten weiter noch die Russellsche Paradoxie von der Klasse aller sich nicht selbst enthaltenden Klassen, wobei wir zunächst annehmen, daß jede Klasse durch eine Eigenschaft ihrer Elemente definiert ist.

Wenn einer Klasse die Eigenschaft, durch die ihre Elemente bestimmt werden, selbst zukommt, so muß sie auch selbst zu ihren Elementen gehören, d. h. sie muß sich selbst enthalten. Gibt es nun eine Klasse aller sich selbst nicht enthaltenden Klassen? Die Annahme einer solchen führt zum Widerspruch, da sie sich nicht enthalten kann und doch wieder enthalten müßte. Andererseits aber ist es eine bestimmte Eigenschaft einer Klasse, sich nicht zu enthalten, und durch diese Eigenschaft sollte demnach doch eine Klasse definiert sein.

Die Lösung dieses Widerspruchs kann nicht von der Frage abhängen, in welcher Beziehung allgemein eine Klasse zu ihren Elementen steht, ob etwa Klasse und Element einander nebengeordnete Begriffe sind oder nicht; wenn jede Eigenschaft eine Klasse definiert, so muß dies auch für die angegebene Eigenschaft gelten.²⁾

Um die Lösung zu finden, müssen wir untersuchen, ob wirklich jede Eigenschaft eine Klasse definiert. Dazu ist es aber nötig, die Begriffe „Eigenschaft“ und „Klasse“ genau zu kennen, und zwar handelt es sich nicht darum, zu wissen, was diese Begriffe „an sich“ bedeuten, sondern wie sie definiert sind. Nur durch ihre Definition

sind die Begriffe vollständig festgelegt und sie haben auch nur so weit einen Sinn, als die Definition einen Sinn ergibt. Wenn der durch die Definition gegebene Begriff nicht mit dem Begriff übereinstimmt, den man haben will, so bleibt nichts übrig, als die Definition abzuändern und nach einer passenden Definition zu suchen. Wenn aber der gewünschte Begriff logisch unmöglich ist, d. h. wenn man sich widersprechende Forderungen an den Begriff stellt, so wird es nicht gelingen, eine passende, logisch einwandfreie Definition dafür zu erhalten.

Nehmen wir zunächst an, es sei ein bestimmter Bereich von konkreten Dingen gegeben. In diesem Bereich ist eine Eigenschaft E definiert, sobald von jedem einzelnen der gegebenen Dinge feststeht, ob ihm E zukommt oder nicht. Wir können nun festsetzen, daß jeder solchen Eigenschaft E eine Klasse K entspricht, und daß diejenigen Dinge, denen die Eigenschaft E zukommt, als Elemente der Klasse K bezeichnet werden. Der vorgelegte Bereich von Dingen wird durch diese Festsetzung nicht verändert und es ergeben sich hier auch keine Schwierigkeiten.

Wir können aber nicht mehr in dieser Weise schließen, wenn wir beliebige Klassen von Klassen betrachten wollen. Der Begriff der Klasse war an den Begriff der Eigenschaft geknüpft und dieser stützte sich auf einen vorgelegten Bereich von Dingen. Wenn nun aber diese Dinge selbst beliebige Klassen sein dürfen, so braucht man zu ihrer Definition schon den Begriff der Klasse, und dieser muß also durch sich selbst definiert werden. Wenn es nun auch gelingen kann, durch eine Zirkeldefinition oder, was dasselbe bedeutet, durch eine implizite Definition den Begriff einer Klasse bestimmt festzulegen, so zeigt es sich doch, daß es nicht möglich ist, ihn so festzulegen, daß in dem gefundenen Bereich die früheren Definitionen erfüllt bleiben, daß also der Begriff der Eigenschaft den bisherigen Forderungen genügt und jeder Eigenschaft eine bestimmte Klasse entspricht. Es ist m. a. W. nicht möglich, den Begriff Klasse so festzulegen, daß beliebig gegebenen Klassen stets eine bestimmte Klasse entspricht, die sie als Elemente enthält, und der Beweis dafür liegt eben in der Tatsache, daß es keine Klasse geben kann, deren Elemente gerade die sich selbst nicht enthaltenden Klassen sind. Wollte man durch die Eigenschaft, eine beliebige sich nicht enthaltende Klasse zu sein, eine neue Klasse definieren, so würde man damit sich selbst widersprechen, da man doch an-

1) Eine ausführlichere Besprechung dieser Paradoxie findet sich in der Abhandlung: P. Finsler. Formale Beweise und die Entscheidbarkeit. Math. Zeitschrift 25 (1926) S. 676–682.

2) So kann ich auch den Ausführungen von J. Petzoldt: Beseitigung der mengentheoretischen Paradoxa . . . Kantstudien Bd. XXX S. 346–356 nicht zustimmen.

Man bezeichne jede quadratfreie natürliche Zahl als „Menge“, ihre Primfaktoren als ihre „Elemente“. Das „Enthaltensein“ in einer „Menge“ bedeutet hier also „Primteiler sein“. Jede Primzahl stellt dann eine „sich selbst enthaltende Menge“ dar, und dies zeigt, daß der Begriff einer solchen keinen Widerspruch in sich enthält. Ob man eine Zahl (bzw. Menge) als „Menge“ von derselben Zahl (bzw. Menge) als „Element“ unterscheiden will oder nicht, spielt dabei keine Rolle; das „sich selbst“ enthalten bedeutet dann eben nichts anderes als „eine ihr gleiche“ enthalten. Auch der Begriff einer Menge aller Mengen ist bei geeigneter Festlegung des Mengenbegriffs (s. u.) nicht widerspruchsvoll.

nimmt, daß schon alle Klassen vorgelegt sind, daß es also keine neuen mehr gibt.

Daß also jetzt die Klassen nicht an sich schon durch die Eigenschaften definiert sind oder definiert werden können, rührt daher, daß die Eigenschaften noch keinen bestimmten Sinn haben, wenn der Bereich von Dingen, auf die sie sich beziehen, nicht fest gegeben ist. So hat insbesondere die Eigenschaft, eine sich nicht enthaltende Klasse zu sein, erst dann einen Sinn, wenn der Begriff Klasse festgelegt ist. Wenn man den Begriff Klasse definiert, ohne dabei den Begriff Eigenschaft zu benutzen, so kann man nachträglich im Bereich aller Klassen den Begriff Eigenschaft in der früheren Weise festlegen und findet dann, daß nicht jeder Eigenschaft eine Klasse entspricht. Eine beliebige Eigenschaft gibt zwar in dem Bereich eine Einteilung in Dinge, denen sie zukommt, und solche, denen sie nicht zukommt, und man ist gewohnt, dadurch eine Klasse definiert zu sehen; es ist jedoch zu beachten, daß man sich in diesem Falle die Dinge des Bereichs anders vorstellt, als die Einteilungen dieser Dinge oder die Eigenschaften, die diesen Dingen zukommen, und daß es eben in manchen Fällen unmöglich werden kann, die Einteilungen oder Eigenschaften mit den Dingen selbst zu identifizieren.

Wollte man die Begriffe Eigenschaft und Klasse gleichzeitig so festlegen, daß jeder Eigenschaft eine Klasse entspricht und jeder Einteilung der Klassen eine Eigenschaft, so würde man damit wegen eines unerfüllbaren Zirkels nicht zum Ziel gelangen. Es ist hier zu beachten, daß Zirkeldefinitionen zwar in gewissen Fällen eindeutige Lösungen besitzen können, daß sie aber nicht in jedem Fall erfüllbar zu sein brauchen.

Zusammenfassend ist also zu sagen: Der Begriff „Klasse“ (und ebenso der Begriff „Eigenschaft“) ist nichts an sich Gegebenes, sondern etwas, was erst definiert werden muß. Jeder Versuch aber, die Klassen allgemein so zu definieren, daß sie auch beliebig als Elemente auftreten können, führt notwendig zu einer Zirkeldefinition oder impliziten Definition. Es ist unmöglich, den Begriff „Klasse“ widerspruchsfrei so festzulegen, daß beliebige Klassen zusammen stets die Elemente einer bestimmten Klasse darstellen.

Es bleibt noch die Frage, wie dann der Begriff Klasse zweckmäßig festzulegen ist. Da nicht alle Forderungen erfüllt werden können, sind gewisse Einschränkungen

nötig. In vielen Fällen wird man den Zirkel vermeiden können, indem man nur solche Dinge als Elemente zuläßt, die von dem Begriff Klasse unabhängig sind. Eine solche Einschränkung ist aber insbesondere für die Zwecke der Mengenlehre, die es mit analogen Fragestellungen zu tun hat, zu eng. Man kann aber hier eine andere Einschränkung vornehmen, die es gestattet, gerade die durch den Zirkel veranlaßten Besonderheiten zu untersuchen und den fraglichen Begriff eindeutig festzulegen.

Der Unterschied zwischen den Klassen und den mathematischen Mengen liegt im wesentlichen nur in der schärferen Umgrenzung der letzteren. Wenn z. B. Herr Lipps sagt, daß die Existenz einer Klasse nur die Existenz irgendwelcher Elemente von gewisser Eigenschaft voraussetzt, aber nicht die Existenz aller dieser Elemente, so ist zu bemerken, daß entweder durch die Angabe der Eigenschaft auch alle Elemente mit dieser Eigenschaft bestimmt sind, oder aber, wenn dies nicht der Fall ist, die Eigenschaft (und demzufolge auch die Klasse) keinen eindeutigen Sinn hat. Auch die Mengen sind nur, allerdings in bestimmter Weise, auf gewisse Dinge als ihre Elemente bezogen, ohne eigentlich „aus“ ihnen zu „bestehen“, denn es ist ein wesentlicher Unterschied zwischen dem einen Ding, der Menge, und den meist vielen Dingen, ihren Elementen. Es ist aber an sich nicht ausgeschlossen, daß eine Menge sich selbst als Element enthält, also mit einem bestimmten ihrer Elemente identisch ist.

Wenn man nun die Mengen für mathematische Zwecke exakt festlegen will, so muß man auch den Bereich der Dinge, die als Elemente auftreten dürfen, scharf umgrenzen, denn sonst hat z. B. der Begriff „aller“ Mengen keinen bestimmten Sinn. Die oben erwähnte Einschränkung, die zu einer scharfen Definition führt, besteht nun darin, daß man nur die Mengen selbst als Elemente zuläßt, also nur Mengen von Mengen betrachtet, ohne jedoch zu verlangen, daß beliebige Mengen zusammen stets wieder eine Menge bilden. Durch jede Menge müssen aber ihre Elemente eindeutig bestimmt sein. Wenn man noch eine passende Festsetzung darüber hinzufügt, wann zwei Mengen als identisch zu betrachten sind, und dann alle in dieser Weise möglichen Mengen zusammennimmt, so erhält man, wie sich zeigen läßt, ein eindeutiges und widerspruchsfreies System, an das man die weiteren Un-

tersuchungen anknüpfen kann.¹⁾ Wirkliche Antinomien können hier nicht mehr auftreten, denn ein tatsächlicher Widerspruch in der Logik selbst ist undenkbar; scheinbare Widersprüche können nur durch Fehlschlüsse entstehen. Insbesondere verschwindet auch die Antinomie von der Menge aller Ordnungszahlen, sobald man sich an exakte Definitionen hält. Die genauere Ausführung führt aber hier zu weit auf rein mathematisches Gebiet.

1) Näheres hierüber findet sich in der Abhandlung: P. Finsler. Über die Grundlegung der Mengenlehre. Math. Zeitschrift 25 (1926) S. 683–713. Vergl. auch P. Finsler. Gibt es Widersprüche in der Mathematik? Jahresbericht der deutschen Math.-Vereinigung 34 (1925) S. 143–155.

ENTGEGNUNG

Von HANS LIPPS-Göttingen

Die Ausführungen von Herrn Finsler sind m. E. keine Auflösung der Paradoxien. Sie sind nur ein neuer Versuch sie zu vermeiden durch die Aufstellung von neuen, widerspruchsfreien Begriffen. In den Paradoxien liegen aber nicht nur irgendwelche „offenbar (?) falsche Überlegungen“ vor. Der Modus der zur Diskussion stehenden Argumentationen ist ein spezifischer. Das Besondere liegt in der durch eine Korrektur von Prämissen oder durch Einführung präzise definierter Prinzipien nicht wegzuschaffenden Stärke der Dialektik. Nicht nur, daß hier Thesis und Antithesis einander wechselseitig heraufführen – es fehlen „Prämissen“ im strengen Sinn, die dann als illegitim dargetan werden könnten. Die Paradoxien sind keine bloßen Antinomien. Das Bestehen einer Antinomie könnte freilich als ein Beweis für irgend etwas in Anschlag gebracht werden. Z. B. als ein Beweis für die Unverträglichkeit der Prämissen zu den Überlegungen, die zur Thesis und – getrennt – aber ebenso zur Antithesis führten. Eine Antinomie kann einfach beseitigt werden. Eine Paradoxie ist aber nur dann „aufgelöst“, wenn der Schein von Richtigkeit aufgedeckt und als bloßer Schein begriffen ist, der sie zu einer Paradoxie machte.

In der von Herrn Finsler anfangs erwähnten Arbeit bestritt ich, daß die Aussagbarkeit eines Wortes von sich selbst beztl. das sich-selbst-Enthalten einer Klasse eine diesen Worten beztl. Klassen gemeinsame Eigenschaft sei. Zu dem Wort KURZ könne nur kurz und zu einer Klasse M nur das Enthalten von M als Eigenschaft gehören. Nämlich als an diesen Dingen vorfindliche und ihre Natur ausmachende Eigenschaften. Dadurch, daß in dem einen Falle dem Wort eine Beschaffenheit inhäriere, die identisch ist mit dem, was dieses Wort bezeichnet, – oder daß im andern Falle das von der Klasse enthaltene Element identisch mit eben dieser Klasse ist, – dadurch seien die Inhärenz dieser Eigenschaft beztl. der Bezug der Klasse zu diesem einen unter ihren Elementen nicht in reflexivem Sinne modifiziert