

savant. Ce que je regrette c'est que la langue allemande, dont je me sers, sera pour bien du monde un obstacle sérieux à s'occuper de mon travail. Ce qui m'en console c'est que les interprètes ne lui manqueront pas, si le livre parvient à se frayer son chemin. Comme l'impression se commencera sous peu, je puis avoir l'espoir de vous le faire parvenir l'été prochain. J'y joindrai un exemplaire destiné à l'Académie Bourbon, qui, malgré que je ne lui sois pas attaché par aucun lien plus resserré, occupe pourtant un poste bien élevé dans mes souvenirs et dans mon affection.

Im Jahre darauf, am 31. März, gab er dem Gervasio Auskunft über eine 1841 in Basel erschienene Ausgabe des Cornelius Nepos und sprach bei dieser Gelegenheit die Hoffnung aus, in jenem Frühjahr nach Italien kommen zu können. Auch erzählte er von seinen neuen Untersuchungen. Den Annalen des Archäologischen Instituts in Rom hatte er eine Abhandlung über die symbolische Bedeutung der Würfel in den Gräbern der Alten geschickt¹⁾:

En attendant, mon ouvrage sur la Gynaicocratie commence à s'imprimer, et en même temps je fais paraître un écrit sur deux peintures sépulcrales du Columbarium de la Villa Pamphili qui se conservent à Munich et où je traite de la signification de l'oeuf dans les mystères dionisiaques et de la fable d'Ocnus²⁾. Malheureusement, je suis forcé de faire tout cela en allemand, comme les autres langues, et même le latin, ne se lisent plus chez nous.

Das Werk über das Mutterrecht erschien erst im Jahre 1861³⁾; und zu der Zeit hatte die briefliche Verbindung mit Gervasio schon eine Unterbrechung erlitten, um wenig später, durch den Tod des alten neapolitanischen Archäologen, endgültig zerrissen zu werden.

(Übersetzt von Dr. Enrico De'Negri-Köln)

¹⁾ Veröffentlicht in den Annali dell'Istituto di corrispondenza archeologica, vol. XXX (1858).

²⁾ Versuch über die Gräbersymbolik der Alten (Basel, 1859).

³⁾ Das Mutterrecht. Eine Untersuchung über die Gynaikokratie der alten Welt nach ihrer religiösen und rechtlichen Natur (Stuttgart, 1861).

EXAKTES DENKEN

Von KURT REIDEMEISTER-Königsberg

Die neue Einstellung, die der sogenannte Intuitionismus in der Grundlagenforschung der Mathematik entwickelte und die Hilbert zu der sogenannten Theorie des Formalismus ausbaute, hat schon mannigfaches Interesse unter erkenntnistheoretischem Gesichtspunkte gewonnen. Ich nenne nur die ausführlichen Darlegungen von O. Becker im achten Band des Jahrbuchs für Philosophie und phänomenologische Forschung, die an Hilbert anknüpfen. In der Tat ist es schwer zu entscheiden, ob die Probleme der Grundlagenforschung mehr mathematischer oder mehr philosophischer Natur sind. Denn wenn auch die Entwicklung eines formalen Apparates, ohne den hier wohl kaum auszukommen ist, — auch M. Geiger¹⁾, der von philosophischer Seite her sich mit Axiomatik befaßte, entwickelte recht weitgehend einen formalen Apparat — immer Mathematik zu sein scheint, so ist doch die Frage, was denn nun im Grunde eine mathematische Erkenntnis sei, eine durchaus philosophische Frage. Der Formalismus aber wäre tot und leer, wenn er nicht einen Ausdruck für eine bestimmte Einstellung zu dieser Frage bedeutete.

Trotzdem kann man nicht meinen, der formale Apparat beantworte implizit alle Fragen, die hier zu stellen sind. Ich glaube, daß die Mathematik bereits endgültig über die formale Leistungsfähigkeit des Hilbertschen Formalismus ins Klare gekommen ist. Seine erkenntnistheoretische Bedeutung aber ist noch keineswegs völlig geklärt. Die Formulierung Hilberts z. B., daß er konkrete Zeichen²⁾ als anschaulich gegeben voraussetzen wolle und daß er in dieser Voraussetzung eine bestimmte philosophische Einstellung sehe, kann sehr leicht zu Mißdeutung Anlaß geben. Es liegt sehr nahe, zumal wenn man die nachfolgenden konkret-formalen Ausführungen nur flüchtiger liest, diese

¹⁾ Systematische Axiomatik der euklidischen Geometrie, Augsburg 1924.

²⁾ Hamburger Abhandl. Bd. 1, 1922, S. 163.

„konkreten Zeichen“ aus ihrem Zusammenhang zu reißen, sie in irgendein System erkenntnistheoretischer Vokabeln zu versetzen und dann Folgerungen zu ziehen, die gewiß nicht bei der Prägung des Ausdrucks gemeint waren. Die Erkenntnistheorie liefert keine fest und klar geprägten Ausdrucksmittel, um die neuartige Idee der konkreten Zeichen adäquat zu beschreiben, und es führt über den Rahmen einer Einleitung hinaus, zuvor eine Erkenntnistheorie zu schaffen, in der sich über die Gedanken philosophieren läßt, die im Hauptteil der Arbeit zum ersten Male dargestellt werden sollen. Versucht aber andererseits ein Erkenntnistheoretiker die wesentlichen Züge der Beweistheorie darzustellen, so wird es hier gewiß nicht an systematischer Klarheit der Beschreibung fehlen, aber ob der lebendige Gedanke sich gern und verdeutlicht im systematisierten Gedanken wiedererkennt, kann die Systematik, kann die Erkenntnistheorie, scheint es, nicht allein entscheiden. Und soweit ich sehe, hat der mathematische Gedanke eine für den Mathematiker völlig befriedigende Beschreibung durch eine Erkenntnistheorie bisher noch nicht gefunden.

Ich möchte im folgenden einige Punkte hervorheben, die von philosophischer Seite leicht übersehen werden; in der Absicht, den erkenntnistheoretischen Studien über die Grundlagen der Mathematik die Wege zu ebnen. Insbesondere werde ich in § 3 kurz auf das oben genannte Werk von O. Becker und die „Systematische Axiomatik der euklidischen Geometrie“ von M. Geiger zu sprechen kommen.

§ 1 Logik und Mathematik

1. Raumanschauung und Logik

Ehe sich die intuitionistische Auffassung durchsetzte, galt die Mathematik als angewandte Logik. In der Tat wird man einigen tiefgehenden Eigenschaften der Mathematik gerecht, wenn man sie angewandte Logik nennt.

Ein Beispiel. Es muß auf den ersten Blick Verwunderung erregen, wenn man den Jordanschen Kurvensatz kennen lernt, welcher besagt: Jede geschlossene, doppelpunktfreie, stetige, ebene Kurve zerlegt die Ebene in zwei Teilgebiete,

in ein inneres und ein äußeres Gebiet, ... und nun weiter hört, daß dieser Satz recht schwierig zu beweisen sei. Da Geometrie sich immer wieder als Lehre vom Raum darbietet und der Raum doch nur anschaulich gegeben ist, so sind doch die Grundtatsachen der Geometrie, meint man, der Anschauung zu entnehmen und darf anschauliche Evidenz als Beweisgrund zugelassen werden. Was ist aber evidentier als die anschauliche Tatsache, die im Jordanschen Kurvensatz Ausdruck findet.

Bei dieser Argumentation vergißt man eben, daß die logische Untersuchung einer anschaulichen Tatsache sehr schwierig sein kann, auch wenn sie für die Anschauung ganz evident ist. Und der Beweis des Jordanschen Kurvensatzes besteht eben in der Aufdeckung von logischen Zusammenhängen. Erkläre ich eine ebene, geschlossene Jordankurve als Rand eines ebenen Gebietes, so ist der Jordansche Kurvensatz trivial. Erkläre ich eine solche Kurve aber durch andere ihrer Eigenschaften — und es gibt natürlich mehrere solcher Möglichkeiten, diese Kurven unter den Gegenständen der Geometrie durch gewisse ihrer Eigenschaften zu kennzeichnen —, so ist es schwierig, aus solchen anderen Eigenschaften auf die Eigenschaft, die unser Satz ausspricht, zu schließen. —

Die logische Struktur der Geometrie ist sehr ausführlich in den Auseinandersetzungen geschildert worden, die um die Berechtigung der nichteuklidischen Geometrie geführt sind. Und der endliche Sieg der nichteuklidischen Systeme über die unbegründeten Ansprüche der reinen Anschauung beruhte in der Einsicht, daß eine Geometrie als strenge Wissenschaft nur ein System von logisch verketteten Eigenschaften von Dingen und Relationen zwischen Dingen ist, die aus einigen Grundeigenschaften und Grundrelationen abgeleitet werden. Diese Grundeigenschaften werden in den Axiomen der Geometrie niedergelegt, und die Axiome sind nichts anderes als eine Art von Definitionen, sog. implizite Definitionen. Sie sind mit anderen Worten logische Setzungen, aus denen dann logische Folgerungen gezogen werden. Diese Gedanken sind oft genug und klar genug auseinandergesetzt. Sie haben ihren klassischen Ausdruck in Hilberts Axiomen der Geometrie gefunden.

2. Schließen und Zählen als autonomes Handeln

Die Versuche, die Arithmetik aber in Logik aufzulösen, sind bisher gescheitert. Und dem Intuitionisten scheint dies bei näherem Zusehen in der Natur des Schließens überhaupt begründet zu sein.

Bemerken wir zunächst einmal: Die Dinge der Geometrie treten uns nicht als Individuen, vielmehr als Klassen gleichberechtigter Gegenstände, Punkte, Geraden, usw. entgegen; die Zahlen aber sind Individuen: es gibt nur eine Eins und nur eine Siebzehn. Von vorneherein legen es die Dinge der Geometrie also nahe, sie durch Eigenschaften und Beziehungen zu beschreiben. Und da die Zusammenhänge von Eigenschaften und Beziehungen logischer Natur sind und da überdies die räumliche Anschauung oft blind und ohnmächtig ist, so befriedigt der logische Beweis in der Geometrie völlig. In der Tat ist denn ja auch der Euklid gerade lange Zeit das Prototyp feinsten logischer Verarbeitung gewesen.

Dagegen prüfen wir die Beziehungen zwischen ganzen Zahlen sehr viel sicherer als durch logische Schlüsse durch Zählen nach, das wir als eine in sich klare autonome Tätigkeit ausüben. Und der logische Schluß erscheint neben diesem einfachen Tun als abstrakt und leer. Wir können leicht nachzählen, daß $2+3=3+2$ ist. Legen wir uns aber nun einmal für diese einfache Tatsache einen logischen Beweis zurecht! Wir gehen auf irgendeine Definition der Zahlen zurück. Nehmen wir z. B. an, die ganzen Zahlen seien durch Axiome erklärt und unter diesen käme das Axiom vor: Für alle ganzen Zahlen a, b ist die Summe $a+b=b+a$. Dann könnten wir schließen: 2, 3 sind Zahlen, also ist $2+3=3+2$. Aber dieser Schluß ist sehr viel bedenklicher als das Nachzählen. Um ihn logisch zu rechtfertigen, muß er offenbar unter eine Schlußform subsumiert werden. Diese müßte etwa lauten: Haben zwei Dinge a und b die Eigenschaft Z , so haben sie auch die Eigenschaft C . 2 und 3 haben die Eigenschaft Z , also haben 2 und 3 auch die Eigenschaft C . Aber woher nehme ich die Sicherheit für diesen abstrakten Schluß? Weiß ich, was Dinge sind oder was Eigenschaften sind, und ob wirklich alle Dinge und Eigenschaften die Eigen-

schaft haben, diesem Schlusse zu genügen? Kann dieser abstrakte Schluß — ganz abgesehen davon, wie wir die Definition der Zahlen auch immer geleistet hätten — einen Gültigkeitsanspruch erheben, der dem einfachen Zählen übergeordnet werden dürfte? Denn das ist doch der Sinn der logischen Formulierungen der Mathematik, den mathematischen Tatbestand dadurch zu klären und die Einsicht in ihn verfestigen und exakter gestalten zu wollen.

Wendet man den Blick auf irgendeinen bestimmten Beweis der Geometrie, so stellt sich das Gefühl für die Zuverlässigkeit der aneinandergefügteten Kette von Schlüssen ohne weiteres ein, aber prüfen wir den einzelnen Schluß wie oben, so stellen sich auch die Bedenken wieder ein, ob das Schlußschema als Instanz für die Gültigkeit des Schlusses angerufen werden darf. Man kann diesen Eindruck in Anlehnung an Weyl¹⁾ so aussprechen: Das abstrakte Schlußschema ist selbst kein Schluß, sondern nur eine Schlußanweisung; der Sinn des Schemas ist der einer Registrierung; der einzelne Schluß aber, der sich unter das Schema subsumieren läßt, ist ein autonomer Akt, der nur sich selber rechtfertigen kann.

Die einfachen arithmetischen Tatbestände aber erfassen wir zwar auch in unmittelbaren Urteilen, aber wir prüfen diese Urteile durch Zählen, nicht durch Schlüsse. Das Zählen nimmt also dieselbe Autonomie für sich in Anspruch wie konkretes Schließen, und dieses autonome Tun läßt sich nicht unter ein logisches Schema subsumieren.

3. Arithmetik und Geometrie als logische Wissenschaften

Diese Bedenken sind aber nicht unbedingt zwingend. Mußten wir gegen die geometrische reine Anschauung mißtrauisch werden, so müssen wir vielleicht auch dem intuitiven Zählen gegenüber vorsichtig sein. Und wenn schließlich das Zählen auch nicht in psychologischem Sinne evidenter werden kann, als es ist, so kann doch der logischen Untersuchung dieser anschaulichen Funktion ihre Berechtigung nicht abgesprochen werden, zumal wenn sich dadurch die

¹⁾ Mathematische Zeitschr. Bd. 10, 1921, S. 54 f.

großartige Auffassung der Mathematik als angewandte Logik bis zu Ende durchführen ließe. Aber wir befinden uns bei der Aufgabe, die Arithmetik zu logisieren, jedenfalls in einer ganz anderen Lage als bei der entsprechenden Aufgabe für die Geometrie.

Die logischen Schlüsse in der Geometrie haben nämlich eine durchaus besondere Eigenschaft vor allgemeinen logischen Schlüssen voraus, und es wäre ganz irreführend, wenn man die Untersuchung der geometrischen Axiome eine rein logische Untersuchung nennen wollte. In der Tat müßte dann ja doch vor einer befriedigenden Theorie der geometrischen Axiome eine Theorie des allgemeinen Urteilens und Schließens geschaffen worden sein, und das ist nicht der Fall. In Wirklichkeit benützt denn auch die geometrische Axiomatik auf Schritt und Tritt die Möglichkeit, die Schlüsse der Geometrie in Rechnungen der Arithmetik, der Algebra oder der Analysis zu übersetzen. Für diese Axiomatik ist die Analysis der autonome Bereich von Gültigkeiten, nicht aber die Logik oder jedenfalls nur insofern, als die Logik in der Analysis gilt¹⁾.

Bei der axiomatischen Begründung der Arithmetik bedürfte es also einer durchaus neuartigen Idee, um dieses wesentliche Hilfsmittel der geometrischen Axiomatik zu ersetzen. Ein fertiges Gebäude der Logik, auf dem man hätte fußen können, war nicht vorhanden, als man diese Frage in Angriff nahm, und so sahen sich die Mathematiker vor die Aufgabe gestellt, zunächst eine Logik aufzubauen, die fein genug und befestigt genug sein sollte, um von ihr aus das diffizile Gebäude der Analysis zu errichten.

4. Russells Logik

Es gibt nur eine Logik und eine Logisierung der Arithmetik, welche als Lösung dieser Aufgabe genannt werden kann, nämlich die von Whitehead und Russell²⁾. Russell entwickelte die Logik aus einer Reihe von Axiomen, die als selbstevident an die Spitze gestellt werden und in welchen die folgen-

¹⁾ Man pflegt i. a. nur hervorzuheben, daß beim Beweise der Widerspruchslosigkeit der geometrischen Axiome die der Analysis vorausgesetzt wird.

²⁾ Principia mathematica, Vol. I, Cambridge, 1925.

den unmittelbar anschaulich zu erfassenden Grundbegriffe enthalten sind: der Satz oder das Urteil, die Eigenschaft oder der Satz mit unbestimmtem Subjekt (x ist rot), die Relation oder der Satz mit zwei oder mehreren unbestimmten Subjekten (x ist größer als y), sodann die logischen Hilfs Worte: und, oder, nicht, folgt, — sowie die logischen Hilfsbegriffe: alle, es gibt. Als Beispiele für die Axiome, die Russell gebraucht, nenne ich¹⁾:

1. Einen Satz p und einen Satz q behaupten, ist dasselbe wie: einen Satz q und einen Satz p behaupten.

2. Einen Satz p und einen Satz q behaupten, und ferner einen Satz r behaupten, ist dasselbe wie: den Satz p behaupten und ferner den Satz q und den Satz r behaupten.

3. Einen Satz p und einen Satz q behaupten oder einen Satz r behaupten, ist dasselbe wie: den Satz p oder den Satz r behaupten und gleichzeitig den Satz q oder den Satz r behaupten.

In Formeln lauten diese Axiome etwa: 1. $(p \text{ und } q) = (q \text{ und } p)$. 2. $((p \text{ und } q) \text{ und } r) = (p \text{ und } (q \text{ und } r))$. 3. $((p \text{ und } q) \text{ oder } r) = ((p \text{ oder } r) \text{ und } (q \text{ oder } r))$. Man sieht diese Sätze leicht ein. Nicht viel schwieriger ist es, mit dem folgenden Axiom einen Sinn zu verbinden:

4. Behaupten, daß eine Eigenschaft $f(x)$ nicht allen Dingen x zukommt, ist dasselbe wie: Behaupten, es gibt Dinge x , denen die Eigenschaft $f(x)$ nicht zukommt.

Aus einigen wenigen solcher Axiome läßt sich nun tatsächlich mittels einiger weniger Schlußmodi die Logik Russells ableiten. Die Definition der Zahl 1 wird alsdann auf die folgende Art geleistet. Man erklärt einerseits die Relation der Identität $x=y$, einer Idee Leibnizens folgend²⁾, so:

$x=y$ heißt für irgendwelche Dinge x und y , daß jede Aussage, die für x richtig ist, auch für y richtig ist und jede Aussage, die für y richtig ist, auch für x gilt.

¹⁾ a. a. O., S. 94—97.

²⁾ a. a. O., S. 168, Df 13. 01.

Sodann erklärt Russell die 1¹⁾ zunächst als eine Eigenschaft von Eigenschaften, und zwar so: Die Eigenschaft 1(f) kommt einer Eigenschaft f(x) dann und nur dann zu, wenn für irgendzwei Dinge x und y, denen beiden die Eigenschaft f zukommt, immer $x=y$ folgt, und wenn es ferner Dinge x gibt, welche die Eigenschaft f besitzen.

Um nun aber mit der gegebenen Erklärung der Identität und der 1 widerspruchsfrei arbeiten zu können, mußte Russell noch gewisse Festsetzungen und ein merkwürdiges Axiom einführen, das einen völlig anderen Charakter als die bisher angeführten Axiome hat, das sogenannte Reduzibilitätsaxiom²⁾. Der Begriff „alle Eigenschaften“ — ist einer Einschränkung bedürftig, wenn er nicht zu Widersprüchen führen soll, und diese notwendige Einschränkung wird axiomatisch durch das Reduzibilitätsaxiom nahezu wieder aufgehoben:

„Alle Dinge“ soll genauer heißen „alle Dinge eines gewissen Bereichs“. Ist nun irgendein Dingbereich vorgelegt, so soll zu ihm ein Bereich unmittelbarer Eigenschaften dieser Dinge erkennbar sein, Eigenschaften des ersten Typs, wie Russell sagt. Zu den farbigen Dingen wären etwa Aussagen wie „x ist rot“, „x ist grün“, als Aussagen des ersten Typs anzusehen. Eigenschaften des zweiten Typs sind dann solche Eigenschaften, die einem Dinge nur zugesprochen werden können, indem man zuvor alle Eigenschaften des ersten Typs prüft. Wenn wir z. B. den Satz: „x hat dieselbe Farbe wie y“ erklären durch: „Alle Farbaussagen über x und über y sind gleichzeitig wahr oder falsch“, so ist diese Eigenschaft der Gleichfarbigkeit eine des zweiten Typs. Entsprechend werden dann die Eigenschaften des dritten, vierten... Typs erklärt.

Das Reduzibilitätsaxiom fordert nun: Zu jeder Aussage irgendeines Typs gibt es eine Aussage des ersten Typs, die immer dann wahr oder falsch ist, wenn es die ursprüngliche Aussage ist. In unserem Beispiel könnte man etwa sagen, die Eigenschaft der Gleichfarbigkeit könne als unmittelbar evident und somit als ersten Typs aufgefaßt werden.

¹⁾ a. a. O., S. 347, Df 52. 01.

²⁾ a. a. O., S. 167, 12. 1 und 12. 11.

Dieses Axiom wird von Russell nicht als unmittelbar evident hingestellt. Die logische Notlage drängt uns dasselbe auf und die Erfahrung findet sich damit ab. Die Eigenschaften der Dinge in unserer Welt haben, so meint Russell, diese merkwürdige Eigenschaft, die das Reduzibilitätsaxiom formuliert.

Aber es bleibt, auch nach dieser Bemerkung, unbefriedigend, daß die einfachen Eigenschaften der ganzen Zahlen, die wieder die größte Selbstevidenz haben, erst mit Hilfe eines so fernliegenden Axiomes gewonnen werden.

Ein anderer naheliegender Einwand wurde von Wittgenstein¹⁾ erhoben: Die Typenlehre Russells setzt das intuitive Zählen voraus. In der Tat sind bei der Einführung der Typen Erklärungen nötig, die man aus den bis dahin verwendeten selbstevidenten Grundbegriffen allein nicht entwickeln kann. —

So ist denn diese durchgeführte Logisierung geeignet, die intuitionistischen Bedenken gegen die innere Berechtigung dieses Vorgehens zu bestärken.

§ 2 Formalismus als kritische Logik

1. Formalismus als intuitionistische Begriffslehre

Aus einer so problematischen Lage konnte nur eine ganz neuartige Auffassung des Problems erretten, und eine solche Auffassung wurde durch die ontologische Entdeckung der Intuitionisten geschaffen: Daß sich das Unendliche weder in den alten klassischen Formen oder Logik noch mit Russells Logik adäquat beschreiben läßt.

Die Kritik des Intuitionismus richtete sich z. B. gegen das in § 1, Nr. 4 angeführte Axiom 4 über die Beziehung einer negierten allgemeinen Aussage und einer Aussage mit „es gibt“. Und sie richtete damit sich gegen eine bis dahin in der Mathematik allgemein übliche Beweismethode. Dieses Axiom kann nämlich nicht als selbstevident zugelassen werden, wenn die Art der Aussage f(x) in ihm nicht sehr wesentlich eingeschränkt wird. Wenn es nur endlich viele Dinge gibt, auf die sich das „alle“ des Satzes bezieht, so ist das Axiom evident.

¹⁾ Annalen der Philosophie, Bd. 1.

Enthält der zugrunde gelegte Dingbereich aber unendlich viele Dinge, so ist die Aussage, daß es gewisse Dinge gibt, sinnlos, wenn man nicht imstande ist, diese Dinge durch eine Kette von Schlüssen oder Konstruktionen aufzuweisen. Diese Möglichkeit kann aber nicht bei allen Aussagen vorausgesetzt werden¹⁾, und wir können kein Axiom als selbstevident zulassen, das die Ausführbarkeit von autonomen Konstruktionen fordert, ähnlich wie das Reduzibilitätsaxiom die Existenz gewisser Eigenschaften und Sätze forderte.

Und was die Zuverlässigkeit und Berechtigung selbst des sogenannten Aussagenkalküls, d. h. derjenigen logischen Sätze, die sich aus Sätzen p, q, \dots mit Hilfe der logischen Hilfs Worte „und“, „oder“, „folgt“, „nicht“ bilden lassen, angeht, so kann und muß man hier fragen: Was bürgt für die Widerspruchsfreiheit der Aussagenaxiome? Sind wir imstande, alle Sätze zu überblicken und zu bestätigen, daß sie die Aussagenaxiome erfüllen und könnten diese Axiome nicht vielleicht sogar für beliebige Sätze immer zu Widersprüchen führen?

Infolge dieser Bedenken gegen die Anwendung der Logik auf das Unendliche, Bedenken, durch die das Zählen im Aufbau der exakten Erkenntnis offenbar wesentlich vor die Logik gerückt wurde, haben die Intuitionisten der Logik als Instanz den Rücken gekehrt. Sie wollen die Mathematik durch unmittelbare, intuitiv evidente Konstruktionen aufbauen. Und da das formale „es gibt“ der klassischen Logik im Aufbau der Mathematik eine sehr große Rolle spielte, so sehen sie sich vor eine umfangreiche Reinigungsaufgabe gestellt, die oft von besonderem Reize ist, meistens aber übersichtliche Tatbestände in eine fast undurchdringliche Wirrnis²⁾ zu verwandeln vorschreibt. Es ist wohl auch ein merkwürdiges Unterfangen, gleichsam ohne Grammatik sprechen zu wollen, und ist es nicht gefährlich, eine Instanz für exaktes Erkennen einzusetzen, die Intuition schlechthin, die auch das unexakteste Erkennen zu qualifizieren und mit dem Nimbus der Tiefe zu umgeben vermag? Bestand diese Gefahr, so war es die fruchtbare Idee des Formalismus, die ihr

¹⁾ Vgl. Weyl, Math. Zeitschr., Bd. 10, 1921, S. 57 und Hilbert, Math. Ann., Bd. 95 1926, S. 163.

²⁾ Vgl. z. B. Brouwer, Math. Annalen, Bd. 93 (1925), S. 244.

begegnete; der Formalismus führte auf dem Trümmerfelde der Logik eine neue Begriffslehre auf und gestattet so genau zu erklären, was exaktes Erkennen sei.

Der Formalismus¹⁾ geht nicht wie die Logik von einigen sinnvollen unmittelbar gegebenen Grundbegriffen, sondern von unbegrenzt vielen Gegenständen bestimmter Art aus, die Zeichen genannt werden. Die unmittelbar erkennbaren Eigenschaften dieser Zeichen und die Relationen zwischen diesen Zeichen sind nichts anderes als gewisse Eigenschaften und Relationen der Dinge, die wir Buchstaben nennen, nämlich diejenigen, die es uns ermöglichen, die Buchstaben zu Wortbildern (Buchstabenkomplexen) und die Wortbilder zu Satzbildern zusammenzufügen. Im Bereich unserer Gegenstände ist also z. B. der Satz: „Dies Ding hier ist das Zeichen A“ immer wahr oder falsch. Ein Satz wie: „In dem Wort ART steht R rechts von A und links von T“ gilt als selbstevident und ebenso die folgende Konstruktion: „ART ist ein Wort, S ist ein Buchstabe, daher ist ARTS wieder ein Wort“. Die Worte sind also nichts anderes als linear geordnete Zeichenkomplexe; sie haben keinen Wortsinn, sie sind ebenso bedeutungsleer wie die Zeichen selbst, die nichts als sich selbst bezeichnen: A ist nur ein Gegenstand, dem das A-sein zukommt. — In der unbegrenzten Wortreihe A, AA, AAA, ... finden wir Dinge, die mit der Zahlenreihe schon viele Eigenschaften gemeinsam hat.

Aussagen über Zeichen nennt Hilbert metamathematische Aussagen. Sie decken sich mit den vom intuitionistischen Standpunkt aus einwandfreien Aussagen über diesen Dingbereich. Eine systematische Gruppierung dieser Sätze ist bisher noch nicht vorgenommen, aber sie sind wohl auch so dem Wesen nach überschaubar. In den Grundzügen haben sie auch kürzlich wieder in der oben genannten Schrift von O. Becker eine klare Darstellung erfahren, und wir wollen uns deshalb mit diesen wenigen Andeutungen begnügen.

Wie ist es nun möglich, von diesen speziellen Einsichten aus etwas für alle Dinge und alle Axiomensysteme Gültiges auszumachen? Dadurch, lautet die Antwort, daß oder insofern sich alle Gedanken durch Zeichen ausdrücken

¹⁾ Hilbert, Hamburger Abhandl., Bd. 1 (1922), S. 157.

lassen. Der Formalismus untersucht, so kann man vorläufig sagen, den Satzleib der bedeutungsvollen Sätze, ohne sich um ihre Seele, ihre Bedeutung zu kümmern; mit gutem Grund: denn da wir ja aus dem Satzleib den Satzsinne zu erkennen vermögen, so müssen sich ja alle inneren Eigenschaften auch in seinem Äußeren widerspiegeln, und das Äußere ist einer systematischen formalistischen Untersuchung zugänglich.

2. Widerspruchsfreiheit des Aussagenkalküls

Statt diese Verhältnisse im allgemeinen genauer zu erörtern, wollen wir lieber gleich ein Beispiel behandeln. Wir wollen das im Beginn dieses Paragraphen ausgesprochene Bedenken gegen den Aussagenkalkül beheben und vom Standpunkt des Formalismus aus zeigen, daß der Aussagenkalkül widerspruchsfrei ist. Wir konstruieren uns zu diesem Zweck aus unseren Zeichen Gebilde, die den Axiomen des Aussagenkalküls und den Schlußfolgerungen desselben genügen.

Wir denken uns unbegrenzt viele Zeichen gegeben, die wir Sätze nennen: p, q, r, \dots dieselben seien in zwei Klassen eingeteilt, die wir die Klasse der wahren und der falschen Sätze benennen wollen. Wir schreiben $[p]=w$, wenn p zur Klasse der wahren Sätze, und $[p]=f$, wenn p zur Klasse der falschen Sätze gehört.

Wir erklären ferner Wahrheitsfunktionen, zunächst mit einer und zwei, dann mit beliebig vielen Leerstellen. Unter einer Wahrheitsfunktion $W(p)$ mit einer Leerstelle verstehen wir eine Vorschrift, die den Ausdruck $W(p)$ in die Klasse der wahren oder die der falschen Sätze einreicht und die nur von der Zugehörigkeit von p zu einer dieser Klassen, nicht aber von irgendwelchen individuellen Eigenschaften von p abhängt. Es gibt nur vier solche Funktionen:

- | | |
|------------------------------|------------------------------|
| 1. $[W(p)]=w$, wenn $[p]=w$ | 2. $[W(p)]=w$, wenn $[p]=w$ |
| $[W(p)]=w$, wenn $[p]=f$ | $[W(p)]=f$, wenn $[p]=f$ |
| 3. $[W(p)]=f$, wenn $[p]=w$ | 4. $[W(p)]=f$, wenn $[p]=w$ |
| $[W(p)]=w$, wenn $[p]=f$ | $[W(p)]=f$, wenn $[p]=f$ |

Entsprechend erklären wir die Wahrheitsfunktionen mit zwei Leerstellen. Wir wollen hier nicht alle Möglichkeiten aufzählen, sondern jetzt gleich die Wahrheitsfunktionen zusammenstellen, die den logischen Worten „nicht“, „und“, „oder“, „folgt“ entsprechen sollen.

„Nicht“ ordnen wir die unter 3. definierte Funktion mit einer Leerstelle zu und nennen sie von jetzt an $N(p)$.

„Und“ ordnen wir die Funktion $U(p, q)$ zu, mit: $[U(p, q)]=w$, wenn $[p]=w$ und $[q]=w$, sonst $[U(p, q)]=f$.

„Oder“ ordnen wir die Funktion $O(p, q)$ zu, mit: $[O(p, q)]=f$, wenn $[p]=f$ und $[q]=f$, sonst $[O(p, q)]=w$.

„Folgt“ (aus p folgt q) ordnen wir die Funktion $F(p, q)$ zu, mit: $[F(p, q)]=f$, wenn $[p]=w$ und $[q]=f$, sonst $[F(p, q)]=w$.

Wir setzen weiter fest, daß man in die Leerstellen dieser Wahrheitsfunktionen selbst wieder Wahrheitsfunktionen mit ausgefüllten Leerstellen setzen und diesen Prozeß iterieren darf, also z. B. $U(p, O(q, r))$ bilden darf. Einen solchen Ausdruck kann man naturgemäß eine Wahrheitsfunktion von drei Leerstellen nennen.

Man bestätigt nun, daß die in § 1, Nr. 4 angegebenen Axiome 1, 2, 3 durch die Wahrheitsfunktionen N, U, O, F erfüllt werden, wenn wir genauer „ist dasselbe wie“ durch „hat denselben Wahrheitswert“ ersetzen; z. B. ist 1. $[U(p, q)]=[U(q, p)]$ und 2. $[U(U(p, q), r)]=[U(p, U(q, r))]$. Ebenso bestätigt man das dritte von uns angegebene und die übrigen Axiome des Aussagenkalküls und man bestätigt auch die Schlußverfahren, die Russell verwendet. Wir greifen auch dafür ein Beispiel heraus und betrachten den Schluß: „aus p folgt q “ ist wahr, „ p “ ist wahr; also ist „ q “ wahr. In der Tat, wenn $[F(p, q)]=w$ und $[p]=w$, so muß $[q]=w$ sein.

Allgemeiner kann man offenbar folgendes sehen: Die Aussagen des Aussagenkalküls gehören erst einmal zu den Wahrheitsfunktionen mit beliebig vielen Leerstellen, die sich aus $U(p, q), O(p, q), F(p, q), N(p)$ sukzessive bilden lassen, und die richtigen Aussagen, die also für alle Sätze p, q, r, \dots richtig sind, sind solche Wahrheitsfunktionen, die für alle Kombinationen der

Wahrheitswerte der Sätze, die in ihnen vorkommen, wahr sind. Z. B. ist $N(U(p, N(p)))$ und $O(p, N(p))$ eine solche Funktion; die erstere entspricht dem Satz vom Widerspruch, die letztere dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten. Man sieht also, daß der Aussagenkalkül widerspruchsfrei ist, weil jeder Wahrheitsfunktion mit ausgefüllten Leerstellen nach unserer Konstruktion eindeutig ein Wahrheitswert zugeordnet ist und sieht ferner aus demselben Grunde auch leicht, daß er entscheidungsdefinit ist, d. h. daß jede für alle Sätze behauptete vorschriftsmäßig zusammengesetzte Aussage entweder als wahr oder falsch erkannt werden kann.

In Anbetracht des folgenden bemerken wir noch, daß man die Funktionen $O(p, q)$ und $F(p, q)$ durch $U(p, q)$ ausdrücken kann; es ist nämlich $[O(p, q)] = [N(U(N(p), N(q)))]$, $[F(p, q)] = [N(U(p, N(q)))]$. Allgemeiner gilt, daß man sogar alle Wahrheitsfunktionen mit zwei und mehr Leerstellen aus $U(p, q)$ und $N(p)$ zusammensetzen kann.

3. Russells Logik und der Formalismus

Nimmt man nun aber noch die logischen Worte „alle“ und „es gibt“, die Eigenschaften und die Relationen mit ihren Axiomen zu den Festsetzungen des Aussagenkalküls hinzu, so erhält man ein System von Formeln, bei dem sich weder die Widerspruchsfreiheit und noch viel weniger die Entscheidungsdefinitheit erkennen läßt und das deswegen vom Standpunkt des Formalismus aus als unsicher abgelehnt werden muß. Genauer gesagt: der Inhalt dieser allgemeineren Logik ist für den Formalisten nicht verbindlich und er will sie zur Begründung exakter Wissenschaft nicht heranziehen. Wenn aber auch die Aufgabe, den allgemeinsten Eigenschafts- und Relationskalkül als widerspruchsfrei zu erkennen, unangreifbar erscheint, so ist es doch sehr wohl möglich, in den Aussagenkalkül spezielle Eigenschaften und Relationen einzubeziehen, d. h. spezielle Eigenschaften und Relationen und alle Sätze, die sich aus ihnen und den logischen Worten „alle, es gibt, und, nicht“ bilden lassen, zu betrachten und die Widerspruchsfreiheit oder gar die Entscheidungsdefinitheit solcher speziellen Systeme zu erkennen. So haben Ackermann und

Neumann¹⁾ bereits für die von Russell abgeleiteten Sätze der Mathematik die Widerspruchsfreiheit nachgewiesen.

4. Die Identität als bedeutungsleere, widerspruchsfreie und entscheidungsdefinite Relation

Wir wollen hierzu wieder ein ganz einfaches Beispiel behandeln, indem wir ein System von Sätzen aus einer bestimmten Relation betrachten, die als die Relation der Identität im Bereich zweier Dinge verwendet werden kann. Indem wir uns der Zeichen (x) für „alle x “, (x, y) für „alle x, y “, usw. und $E(x)$ für „es gibt ein x “ usw. bedienen und für $N(x=y)$ einfacher $x \neq y$ schreiben, formulieren wir die Axiome für die Relation der Identität $x=y$ so:

1. $(x) x=x$
2. $(x) E(y) x \neq y$
3. $(x, y) N(U(x=y, y \neq x))$
4. $(x, y, z) N(U(U(x=y, y=z), x \neq z))$
5. $(x, y, z) N(U(U(x \neq y, x \neq z), y \neq z))$

In Worten lauten diese Axiome:

1. Für alle x ist x mit x identisch.
2. Zu jedem x gibt es ein von x verschiedenes y .
3. Ist x mit y identisch, so ist auch y mit x identisch (Axiom der Symmetrie).
4. Ist x mit y und y mit z identisch, so ist auch x mit z identisch (Axiom der Transitivität).
5. Ist x und y verschieden und x und z verschieden, so ist y mit z identisch (Axiom der Anzahl).

Wir betrachten nun die Gesamtheit der Funktionen der Variablen x, y, z, \dots , die sich aus $x=y$, „und“ und „nicht“ bilden lassen — die in den Axiomen verwendeten Ausdrücke mögen als Beispiele dienen. Wir können etwas anders auch sagen: wir fassen alle Wahrheitsfunktionen $W(p, q, \dots)$ ins Auge und denken uns an Stelle der p, q, \dots je $x=y, z=t, \dots$ eingesetzt. Aus diesen Funk-

¹⁾ Mathemat. Zeitschrift. Bd. 26, 1927, S. 1.

tionen der Variablen $x, y, z, t \dots$ erhalten wir weitere solche Funktionen, indem wir zwei oder mehrere Variable identifizieren, also z. B. aus $x=y$ die Funktion $x=x$ ableiten. Und aus diesen Funktionen erhalten wir die Sätze unseres Systems, indem wir die Variablen $x, y \dots$ durch all- und es gibt-Zeichen in einer bestimmten Reihenfolge absättigen. Auch diesen Prozeß mag man sich an den Sätzen der Axiome verdeutlichen.

Wir behaupten nun, daß diese Identitätsrelation sich als ein widerspruchsfreier und entscheidungsdefiniter Begriff herausstellt, wenn wir noch die folgenden Festsetzungen treffen: 1. Die Axiome sind wahr. 2. Alle Sätze, die sich mit den formalen Schlußverfahren der Russellschen Logik, — die wir, streng genommen, hier alle auführen und beschreiben müßten, ohne die Bedeutung dieser Schlußweisen zu benutzen, — aus den Axiomen beweisen lassen, sind wahr. Die Widerspruchsfreiheit besagt, daß nach diesen Festsetzungen ein Satz niemals gleichzeitig wahr und falsch ist, die Entscheidungsdefinitheit, daß jeder Satz entweder wahr oder falsch ist.

Die Widerspruchsfreiheit läßt sich leicht einsehen, weil wir die Sätze unseres Systems auf gewisse Sätze eines anderen widerspruchsfreien Systems unter Erhaltung der Wahrheitswerte abbilden können. Seien nämlich a, b die bedeutungsvollen Bezeichnungen für zwei Dinge und das Zeichen $=$ bedeute jetzt die Identitätsrelation für diese beiden Dinge; es seien also $a=a$ und $b=b$ wahr und $a=b$ und $b=a$ falsch. Wir bilden nun alle Sätze, die sich mit Hilfe von Wahrheitsfunktionen aus diesen vier Elementarsätzen bilden lassen. Unter diesen Sätzen gibt es eine Teilmenge, die sich unter Erhaltung des Wahrheitswertes auf die Sätze aus unserer bedeutungslosen Relation abbilden lassen; indem wir nämlich jedesmal einen Ausdruck der Form $(x) f(x)$ ersetzen durch $U(f(a), f(b))$ und einen Ausdruck der Form $E(x)f(x)$ ersetzen durch $O(f(a), f(b))$ und so nach und nach die „all“ — und „es gibt“-Zeichen aus den bedeutungsleeren Sätzen entfernen, erhalten wir schließlich die Form eines bedeutungsvollen Satzes. Da die Axiome hierbei in richtige bedeutungsvolle Aussagen übergehen und die Beweisketten bei dieser Abbildung ebenfalls nicht gestört werden, so muß also unsere bedeutungsleere Relation widerspruchsfrei sein.

Man beachte, daß man die Bedeutung von $a=a, a=b$ usw. nicht notwendig zu kennen braucht, um diesen Beweis durchzuführen; man braucht nur das aus den vier Elementarsätzen gebildete System als widerspruchsfrei und als im obigen Sinne auf die Sätze aus der durch die Axiome 1 bis 5 erklärten Relation abbildbar erkannt zu haben; das erstere folgt aber sofort aus der Widerspruchsfreiheit des Aussagenkalküls, das letztere aus den eben angestellten Überlegungen. Bei dieser Auffassung ist der Beweis rein formal und durchaus naturgemäß.

Um auch die Entscheidungsdefinitheit zu beweisen, bemerken wir zunächst, daß alle Sätze $f(a, a), f(a, b), f(b, a), f(b, b)$, die wir aus den vier Elementarsätzen bilden können, ihren Wahrheitswert nicht ändern, wenn a und b vertauscht werden; denn die vier Elementarsätze selbst haben ja diese Eigenschaft. Der Wahrheitswert einer Funktion $f(x, y)$ mit zwei Leerstellen braucht also 1. nur für den Fall bekannt zu sein, daß x und y miteinander identisch sind, 2. für den Fall, daß x und y verschieden sind — alsdann ist sie völlig bekannt. Entsprechendes gilt für Funktionen mit mehr Leerstellen. Dem entsprechend kann man zeigen: Ist $f(x, y)$ irgendeine Funktion mit zwei Leerstellen und ist der Wahrheitswert von

$$(1) (x, y)N(U(x=y, N(f(x, y))))$$

d. h. von „aus $x=y$ folgt $f(x, y)$ “ und von

$$(2) (x, y)N(U(x \neq y, N(f(x, y))))$$

d. h. von („aus $x \neq y$ folgt $f(x, y)$ “) gegeben, bzw.

ist die Funktion $f(x, y)$, wie wir kurz dafür sagen wollen, „bekannt“, so kennt man den Wahrheitswert von allen Sätzen, die sich aus $f(x, y)$ allein bilden lassen; ferner sind dann auch die Wahrheitswerte der Sätze bekannt, die aus (1) und (2) hervorgehen, wenn man in ihnen $f(x, y)$ durch $N(f(x, y))$ ersetzt; ist ferner $g(x, y)$ eine Funktion, die denselben Voraussetzungen wie $f(x, y)$ genügt, so kann man auch die Wahrheitswerte aller Sätze, die sich aus der Funktion $U(f(x, y), g(x, y))$ bilden lassen, bestimmen. Zum Beweise überlegen wir uns folgendes:

1. Sind die beiden Sätze (1) und (2) wahr, so folgt $(x, y) f(x, y)$ als wahr, und daraus ergeben sich $(x)E(y)f(x, y)$, $E(x)(y)f(x, y)$, $E(x, y)f(x, y)$, als wahr. Ist der Satz (1) wahr und der Satz (2) falsch, so erkennt man $(x, y)f(x, y)$ als falsch, $(x)E(y)f(x, y)$ als richtig und daraus dann $E(x, y) f(x, y)$ ebenfalls als wahr; $E(x)(y)f(x, y)$ ist falsch. Ähnlich kommt man in den beiden andern Fällen zum Ziel.

Daß mit f auch $N(f)$ bekannt ist, sieht man ohne Mühe.

2. Entsprechendes gilt für Funktionen mit drei oder mehr Leerstellen. Ist der Wahrheitswert von $f(x, y, z)$ bekannt, wenn $x=y=z$, $x=y \neq z$, $x=z \neq y$, $x \neq y=z$, so ist sie allgemein bekannt. Die angegebenen Fallunterscheidungen sind natürlich nur infolge des Axioms 5 vollständig.

3. Wir müssen uns nun noch zweierlei überlegen: Einerseits: ist eine Funktion bekannt, so ist auch eine Funktion, die durch Identifikation zweier ihrer Variablen hervorgeht, bekannt; andererseits: sind f und g bekannte Funktionen, so ist auch $U(f, g)$ eine bekannte Funktion. Das erste bestätigen wir an einer Funktion mit drei Veränderlichen. In der Tat, ist $f(x, y, z)$ eine Funktion, die für die unter 2. angegebenen Fälle bekannt ist, so ist $f(x, x, z)$ bekannt für $x=x=z$ und $x=x \neq z$. Das zweite überlegen wir uns an zwei Funktionen mit zwei Leerstellen. $U(f, g)$ ist bekannt für $x=y$, $z=t$; $x=y$, $z \neq t$; $x \neq y$, $z=t$; $x \neq y$, $z \neq t$. Der Wert von „aus $x=y$ und $z=t$ folgt $U(f, g)$ “ z. B. ändert sich aber nicht, wenn wir die Voraussetzung durch den Zusatz $y=z$ oder den Zusatz $y \neq z$ ergänzen; so erkennt man, daß sich der Wahrheitswert von $U(f, g)$ für alle kombinatorisch möglichen Identitäts- und Verschiedenheitsbeziehungen ihrer Variablen x, y, z, t bestimmen läßt.

Man sieht also, daß mit $x=y$ auch alle die daraus mit „nicht“ und „und“ konstruierbaren Funktionen bekannt sind.

Auch eine andere aus der geometrischen Axiomatik bekannte Fragestellung läßt sich auf unsere Untersuchung übertragen, nämlich die Frage nach der Unabhängigkeit der Axiome; sie wäre in unserem Fall leicht durchzuführen; bildet man z. B. die Identität im Bereich von zwei Dingen, so erhält man eine Relation, die die Axiome 1–4, aber nicht das Axiom 5 erfüllt.

5. Relationstheorie vom Standpunkt des Formalismus aus

Eine Reihe weiterer Erklärungen und Fragen liegen nahe: Derselbe Begriff kann unter Umständen durch verschiedene Axiomensysteme erklärt werden. Was heißt dabei genau, daß $r(x, y)$ und $s(x, y)$ „dieselbe“ Relation sind? Offenbar folgendes: Wird in allen Sätzen, die neben den logischen Hilfsworten nur $r(x, y)$ enthalten, $r(x, y)$ durch $s(x, y)$ ersetzt und umgekehrt in allen Sätzen, die neben den logischen Hilfsworten nur $s(x, y)$ enthalten, $s(x, y)$ durch $r(x, y)$ ersetzt, so bleiben bei beiden Operationen die Wahrheitswerte der Sätze erhalten.

Man kann die Begriffe, die bestimmten Axiomen genügen, in Klassen zusammenfassen und z. B. von symmetrischen und transitiven Relationen sprechen, man kann nach allen symmetrischen und transitiven Relationen fragen, d. h. genauer fragen: welche Axiome kann man zu den Axiomen 3 und 4 so hinzufügen, daß insgesamt wieder ein widerspruchsfreies oder entscheidungsdefinites System von Sätzen entsteht. Und bei der Beantwortung dieser Frage erhielte man dann merkwürdigerweise einen Überblick über alle möglichen solchen Begriffe, ohne ihre Bedeutung zu kennen.

Man muß ferner mehrere Begriffe nebeneinander betrachten. Es ist nämlich zu beachten, daß zwei je für sich entscheidungsdefinite Begriffe keineswegs zusammen ein wiederum entscheidungsdefinites System von Sätzen erzeugen. Insbesondere kann dieselbe Relation in einem System von zwei Relationen ganz verschiedene Rollen spielen; z. B. ist die Identität im Bereich von zwei Dingen für sich genommen formal derselbe Begriff wie die Relation der Längengleichheit im Bereich von vier Dingen, die zu je zweien gleich lang sind, wenn auch dieser letztere Begriff nur wieder für sich allein genommen wird. Man kann die Begriffe daher auch weiterhin nach den Rollen klassifizieren, die sie in einem System mit mehreren Grundbegriffen spielen; z. B. ist das Identitätsein in unserer Auffassung eine solche Eigenschaft einer Relation in einem System mit mehreren Grundbegriffen.

Man kann schließlich die Methoden, Sätze zu bilden und als wahr oder falsch zu benennen, noch erweitern, wie dies auch von Hilbert geschehen ist (vgl.

§ 3, Nr. 2)¹⁾, und steht schließlich vor der Frage, wie die logischen Methoden der Satzbildung und der Verteilung der Sätze in zwei Klassen, vor allgemeineren und anderen Methoden, Zeichenkomplexe zu bilden und diese in eine bestimmte Anzahl von Klassen zu verteilen, ausgezeichnet ist.

§ 3 Exaktes Erkennen

1. Metamathematik

Man erhob gegen die Theorie der bedeutungsleeren Zeichen Hilberts den Vorwurf, ein Zeichen hätte doch daher seinen Namen, daß es etwas bezeichnete und bedeutungsleere Zeichen seien also widerspruchsvoll. Man nannte dann dieselben Dinge Spielmarken, aber können Spielmarken den Erkenntniswillen befriedigen? Der Formalismus, konnte man jetzt sagen, verwandelt Mathematik in Spiel, und wenngleich Spiel früher einmal als die höchste Daseinsform des freien Menschen gegolten hatte (mit dem Mathematiktreiben übrigens viele Berührungspunkte hat), so hieß das doch jetzt, daß die Mathematik durch die Auffassung des Formalismus völlig entwertet sei und folglich der Formalismus falsch sein müsse. Vielleicht sollte man statt „Zeichen“ — „Urintuitionen gestaltlicher Einheiten, durch Urakte des schöpferischen Geistes immer wieder erzeugte Gestaltindividuen von wohlbestimmter Gestalthaftigkeit“ sagen, um so vielleicht die Mathematik ihres allzuleichten Gewandes zu entkleiden —, wenngleich man auch dann noch befürchten müßte, eine so erschaffene und konstruierte 2 werde nicht allen Wünschen genügen, die dieses geheimnisvolle Symbol für die Pythagoräer befriedigen konnte.

Man kann sich nur mit Mühe der wuchtigen Poesie intuitionistischer Formulierungen entziehen, wenn man überhaupt für sie empfänglich ist. Mir scheint, dieses sollte nur um so mißtrauischer gegen sie stimmen. Zu viele Saiten schwingen hier mit, die den Blick für Tatbestände trüben. Zu gerne wären wir manchmal noch Magier und Mantiker, und der Reiz der Freiheit im Formalismus, so oft er auch bei Hilbert glänzenden Ausdruck findet, ist viel zu sublim, als daß er zu einer Verlockung würde, die es z. B. mit O. Beckers

¹⁾ und Math. Ann., Bd. 88 (1922), S. 151.

Verführung zur alten Priestersünde der Magie an Farbigkeit aufnehmen könnte. Geben wir uns also lieber diesem Reiz der Freiheit hin, wenn wir nunmehr die Struktur des exakten Erkennens beschreiben wollen. —

Zunächst heben wir noch einmal hervor, daß die metamathematischen Einsichten die Anforderungen, die überhaupt je an inhaltvolles Erkennen gestellt worden sind, befriedigen. Den metamathematischen Einsichten entspricht eine Welt von Gegenständen mit ihren Eigenschaften und Relationen, also wohlbestimmte ontologische Tatbestände. Der Formalismus erklärt insbesondere diese Gegenstände als exakt erkennbar und die metamathematischen Aussagen als exakte Erkenntnisse. Diese in bedeutungsvollen Zeichen festgehaltenen Erkenntnisse sind aber selbst nichts anderes als zwei aufeinander in einer gewissen Weise abgebildete Komplexe aus dieser Welt der Zeichen, die insofern Erkenntnis sind, als die beiden Komplexe durch dies Bezogenwerden in ihrer Struktur übersichtlicher werden. Der Vorgang z. B., die logischen Hilfs- worte, die durch Axiome erklärt waren, auf Wahrheitsfunktionen abzubilden, dieses eindeutige Beziehen dieser beiden Zeichenkomplexe aufeinander, das ist ein exaktes Erkennen.

Charakteristisch für diese Auffassung ist also, daß die kombinatorischen Tatsachen, die dem Lesen und Schreiben zugrunde liegen (also Tatsachen wie: in AB steht A links von B), im Aufbau der exakten Wissenschaft an den Anfang vor die Logik gerückt werden und daß die bedeutungsvollen exakten Begriffe sowie Urteile selbst bestimmte kombinatorische Gegenstände sind, die auf andere solche Gegenstände geeignet bezogen und aus denen nach gewissen kombinatorischen Regeln neue Begriffe und neue Sätze gebildet werden können, denen dann nach eben diesen Regeln wieder bestimmte Bedeutungen zugeordnet werden.

2. Erkennen mittels bedeutungsloser Begriffe¹⁾

Die wesentlichste Entdeckung Hilberts liegt aber in der Bemerkung, daß wir in der Untersuchung exakter Tatbestände uns durchaus nicht die Fesseln

¹⁾ Hilbert, Math. Ann., Bd. 95 (1926), S. 161.

anzulegen brauchen, in denen sich die eben geschilderte intuitive, die mathematische Erkenntnis bewegt. Es lassen sich im Gebäude der Analysis viele Begriffe aufweisen, denen keine Bedeutung im obigen Sinne zukommt, denen also inhaltlich kein bestimmter kombinatorischer Tatbestand zugeordnet ist; es war ja gerade das Verdienst der intuitionistischen Kritik, solche Begriffe aufgewiesen zu haben (z. B. das Kontinuum und die reelle Zahl). Und auch Schlußweisen werden in der Analysis gebraucht, die im gleichen Sinne bedeutungslos sind; ist ja doch ein Satz der Form: „Alle ganzen Zahlen haben entweder die Eigenschaft f oder nicht“ inhaltslos und alle Schlußweisen, die ihn benützen, also auch. Die Intuitionisten forderten deshalb den Verzicht auf diese Begriffe und Methoden (vgl. § 2, Nr. 1).

Der Formalismus aber willigte in diese Beschränkung unserer Erkenntnismittel nicht ein; er hält diese Forderung des Intuitionismus für willkürlich. Die Erkenntnismethoden unterliegen keiner anderen Einschränkung als der einen, daß sie Erkenntnisse vermitteln sollen. Und die Entdeckung Hilberts ist es, daß die Einsichten über die kombinatorischen Tatbestände selbst sich erst durch Einführung bedeutungsloser Begriffe und Methoden zu dem übersichtlich geordneten Apparat der Analysis zusammenschließen lassen, und zwar so, daß alle durch diesen Apparat bewiesenen bedeutungsvollen Sätze — Sätze also, die sich auf kombinatorische Tatbestände inhaltlich beziehen, — wahr sind, d. h. die Tatbestände im intuitionistischen Sinne zutreffend schildern.

Der Apparat der Analysis hat nämlich als kombinatorisches System von Zeichen die Eigenschaft, gewissen Komplexen, gewissen, zunächst sämtlich bedeutungslosen Sätzen widerspruchsfrei Wahrheit oder Falschheit zuzusprechen, d. h. sie nach bestimmten kombinatorischen Regeln in eine und nur eine dieser beiden Klassen einzureihen. Der Apparat der Analysis hat überdies die Eigenschaft, daß sich viele seiner Sätze als bedeutungsvolle exakte Sätze auffassen lassen und daß die intuitiven Konstruktionen und Beweise, als formale Regeln aufgefaßt, zu seinen formalen Beweisregeln gehören. Ein Satz also, der sich intuitiv durch Konstruktionen im Bereich der Zahlenreihe etwa durch bedeutungsvolle Überlegungen beweisen läßt, ein solcher Satz läßt sich gewiß

auch im formalen Apparat der Analysis beweisen; man braucht aus dem bedeutungsvollen Beweis — sozusagen — nur die Bedeutung fortzudenken, um den formalen Beweis zu erhalten, und da der Apparat widerspruchsfrei ist, so muß dieser Satz, auch wenn er irgendwie mit Hilfe der wesentlich bedeutungslosen Begriffe behandelt wird, wieder in die Klasse der wahren Sätze eingereiht werden.

3. Exakte Begriffe in der Anwendung

Diese Insel exakter Tatsachen und exakter Methoden ist durch mannigfache Fäden mit einer umfassenderen problematischen Welt verknüpft. Diese Beziehung selbst ist problematisch und das unmittelbare Erfassen dieser Beziehungen führt niemals zu exakten Erkenntnissen. Es bildet vielmehr nur den Anlaß zu bestimmten, exakten Konstruktionen. Wir zeigten ja, wie man in exakter Weise Begriffe und Begriffssysteme konstruieren kann, ohne sie inhaltlich auf die Dinge des exakten Bereichs zu beziehen. Die problematische Welt nun kann Untersuchungen über Begriffssysteme einer gewissen Beschaffenheit anregen, also z. B. die Frage anregen, ob der starre Körper ein widerspruchsfreier Begriff ist und in welchen Geometrien er möglich ist. Nun und nimmer aber darf ein bedeutungsvolles Wort, das auf irgendeine Erscheinung der problematischen Welt hinweist, sich als exakter Begriff gebärden, ehe es sich der Kontrolle der Widerspruchsfreiheit unterzogen hat, wie noch viel weniger umgekehrt ein exakter Tatbestand dadurch befestigt werden kann, daß in der problematischen Welt eine Erscheinung nachgewiesen wird, die sich auf ihn problematisch beziehen läßt.

4. Bedenken vom Standpunkt des naiven Denkens aus

Es liegt auf der Hand, daß der Ansatz des Formalismus vielen Widerständen begegnen muß. Wie lange hat sich die räumliche Anschauung gesträubt, den Ansprüchen der Logik Gehör zu geben, — so muß sich jetzt das naiv-intuitive Denken gegen die hier entwickelte formale Auffassung der logischen Grundoperationen und Begriffe auflehnen. Wie man die reine Anschauung postulierte

oder erschloß, um die Gültigkeit der Raumanschauung zu begründen oder zu erklären, so wird man jetzt auf das seiner selbst gewisse Denken verweisen, das uns unmittelbar den Satz, den Begriff, die Funktionen des „und“, „oder“, „folgt“ erkennen ließen. Man wird fortfahren, der Formalismus tue diesen Grundintuitionen sogar Zwang an; das „folgt“ des logischen Denkens sei z. B. keine Wahrheitsfunktion und wenn man sage „aus p folgt q “, so sei das ein ganz anderer Gedanke, als das „ p und q nicht gilt nicht“ der formalen Logik.

In der Tat ist es aber auch gar nicht der Ehrgeiz des Formalismus, das uns wohlvertraute Denken formal widerzuspiegeln, sondern kritisch zu ihm Stellung zu nehmen und nötigenfalls auch neue exakte Erkenntnismittel zu konstruieren, wobei zwar die logischen Erfahrungen der Jahrhunderte benützt, aber nicht als Norm anerkannt werden. Und kritisch Stellung nehmen heißt: Die Widerspruchslosigkeit der Denkmethoden erkennen. Wie will man aber ohne die Gedanken des Formalismus je einen Beweis für die Widerspruchsfreiheit auch nur des Aussagenkalküls führen? Das unkritische Denken kann sich gegen solche Bedenken nur mit der Bemerkung wehren, daß der Aussagenkalkül, wenn widerspruchsvoll, auch sinnlos wäre, und daß er doch offenbar nicht sinnlos sei.

Von anderer Seite wird man sich vor allem daran stoßen, den Gültigkeitsbereich der exakten Erkenntnisse so merkwürdig umgrenzt zu sehen. Die logischen Regeln wie der Satz des ausgeschlossenen Dritten z. B. und überhaupt alle tautologischen Sätze der Logik verlieren ihre alte Position; obgleich sie früher a priori für alle Sätze gelten wollten, wird ihre Richtigkeit jetzt erst bewiesen, und zwar nur für gewisse exakt-bedeutungsvollen Sätze, und im übrigen wird es für freie Konstruktion erklärt, ob man im System der formalen Satzkonstruktionen diese Regeln beibehalten will oder nicht.

Und schließlich müssen sich immer wieder Bedenken gegen den Wert bedeutungsleerer Begriffe erheben und man wird immer wieder versucht sein, zu fragen, ob der abstrakten Exaktheit die lebendige Bedeutung geopfert werden dürfe.

Aber diese Frage verwischt den ontologischen Tatbestand, den der Formalismus aufgedeckt hat. Zunächst handelt es sich hier um ein Konstatieren. Der Intuitionismus konstatierte, daß die Regeln der überlieferten Logik nur sinnvoll und richtig sind, wenn sich das „alle“ und das „es gibt“ auf endliche Dingbereiche bezieht: wir sind wesentlich an und in das Endliche hineingebunden und sind, nicht aus formalen Gründen, sondern aus echtem Erkenntnistrieb gezwungen, die bisher allzu naiven Ansichten über das Unendliche aufzugeben und der Verwendung des Unendlichen in der Mathematik einen neuen Sinn zu geben. Die Möglichkeit dieser Sinnggebung aber beruht wiederum auf einer gewissen ontologischen Entdeckung, nämlich der Möglichkeit, bedeutungsvolle Zeichensysteme durch bedeutungsleere Zeichen und Beweisregeln widerspruchsfrei zu ergänzen.

5. O. Beckers Rechtfertigung des Transfiniten¹⁾

Wir wollen diesen Tatbestand uns noch einmal durch Besprechung eines Einwandes von O. Becker beleuchten. Becker will den Begriff des Transfiniten, der also exakt bedeutungsleer ist, rechtfertigen. Er meint dazu, dem Transfiniten eine Bedeutung beilegen zu müssen, ein Wesen aufweisen zu müssen, das unter diesen Begriff fällt. Er findet dies in einer gewissen Art des auf sich selbst zurückgewendeten Denkens, aber was ergibt sich nun im Verlauf seiner Überlegungen sofort? Daß aus diesem Haben eines transfiniten Wesens nichts weiter folgt als dieses Haben selbst. Wir haben dies Ding, aber wir können über die formal ungeklärten Probleme, wie der Begriff des Transfiniten in den Apparat der Analysis eingereiht werden muß, nichts, aber auch gar nichts neues aussagen. Noch mehr, wir dürfen wohl sagen, es liegt im Wesen der Intuition von der transfiniten Reflexion, daß sie unbestimmt ist, gerade so wie es im Wesen des anschaulichen Kontinuums liegt, logisch unbestimmt zu sein; das exakte Problem des Transfiniten kann nun und nimmer durch diese Intuition gestellt, es muß vielmehr folgerichtigerweise sogar abgelehnt werden.

¹⁾ Jahrb. f. Phil. u. phänom. F., Bd. 8, S. 440—809.

Denn das exakt Transfinite bleibt wesentlich und für alle Zeit eine Konstruktion, die nur in der Welt des exakten Formalismus einen Sinn hat, und wenn diese Konstruktion gelungen ist, so ist damit die Wesenserkenntnis der transfiniten Reflexion O. Beckers um nichts gefördert, so wenig wie die mathematische Kontinuumtheorie die Wesenserkenntnis der farbigen Fläche fördert; denn exakte Methoden liefern nur über kombinatorische Sachverhalte Wesenserkenntnisse. Es scheint mir übrigens, daß jene transfinite Reflexion nur gebildet werden konnte, weil schon vorher die formale Struktur des Transfiniten bekannt war; aber wie dem auch sei, jedenfalls kann sie nicht einmal diejenigen Eigenschaften des Transfiniten rechtfertigen, die sich unmittelbar in ihr widerspiegeln, ebensowenig wie der Dedekindsche Begriff „meine Gedankenwelt“¹⁾ die Menge aller Mengen rechtfertigen konnte, obgleich diese Welt inhaltlich doch völlig bestimmt ist und intuitiv sofort aufgefaßt werden kann.

6. M. Geigers systematische Axiomatik

Schließlich sei noch an der Besprechung einiger Gedanken von M. Geiger versucht, die Einsichten in das Wesen des Formalismus zu vertiefen. M. Geiger hat seine systematische Axiomatik²⁾ zwar nicht in Anlehnung an den Formalismus geschrieben, aber trotzdem hat die Methode der Relationstheorie, wie er sie verwendet, viele Berührungspunkte mit den formalistischen Methoden.

M. Geiger durchforscht die Axiome der euklidischen und projektiven Geometrie „wesensmäßig“ und „systematisch“ auf folgende Weise: Er geht von einer Gegenstandswelt aus, auf die sich das Satzgebäude dieser Geometrien bezieht, und stellt nun zunächst durch wesensmäßige Betrachtung die Grundrelationen fest, mit denen diese Gegenstände begrifflich beschrieben werden sollen. Er erkennt als solche z. B. die Relation des Inzidierens an und beginnt nun mit der systematischen Durchforschung dieser Relation. Obgleich Geiger hierzu eine eigene Symbolik einführt, die mit der der formalen Logik nicht von

ihm verglichen wird, so darf man diese Systematik doch wohl so wiedergeben: Er betrachtet die Sätze, die sich aus den logischen Hilfsworten „und“, „nicht“, „alle“, „es gibt“ und der Relation des Inzidierens zwischen Punkten und Geraden, Punkten und Ebenen, Geraden und Ebenen bilden lassen; er ordnet sie nach ihrer logisch-formalen Kompliziertheit, insbesondere in Stufen danach, wie viele Inzidenz-Relationen in einer zusammengesetzten Relation vorkommen. Diese Relationen werden bis zur fünften Stufe daraufhin geprüft, ob sie im vorgelegten Dingbereich zutreffen, ob sie also in das Relationsgebäude der Inzidenzbeziehungen der projektiven oder der euklidischen Geometrie hineingehören oder nicht. Ferner wird die logische Ableitbarkeit der richtigen Sätze auseinander untersucht und so aus den systematisch geordneten Sätzen systematisch die Axiome nacheinander bis zur fünften Stufe ausgesondert. Es ergibt sich schließlich oft die Möglichkeit, an Stelle eines Axioms, das in der projektiven Geometrie zutrifft, ein anderes Axiom anzunehmen und so den Ausblick auf andere zunächst bedeutungsleere Relationssysteme, andere Geometrien, wie der Verfasser sagt, zu gewinnen.

Die Durchsiebung der formal möglichen Sätze der vierten Stufe ist bereits ein recht schwieriger Prozeß, der sich nur mit viel kombinatorischem Scharfsinn durchführen ließ; es sind Überlegungen nötig, die mit mathematischen und exakt kombinatorischen viel Ähnlichkeit haben. Aber doch kann darüber kein Zweifel bestehen, daß im Grunde durch dieses Systematisieren nur ein Problem aufgeworfen, aber keines beantwortet wird.

Das gestellte Problem lautet: Wie läßt sich einsehen, daß die Inzidenzrelation der projektiven und der euklidischen Geometrie eine entscheidungsdefinite Relation ist, und die Antwort lautet, man müsse die formal geordneten Sätze systematisch durchforschen; systematisch aber heißt: einen Satz nach dem anderen, eine Stufe nach der anderen, so also, wie man eine endliche Menge wohl durchforschen kann, niemals aber eine unendliche. Diese systematische Durchforschung ist also nach einer Wesenseinsicht in die Natur des zu untersuchenden Satzsystems unmöglich. Diese Tatsache ist Geiger nicht

¹⁾ R. Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen? Braunschweig, 1911, S. 17.

²⁾ Systematische Axiomatik der euklidischen Geometrie, Augsburg 1924.

entgangen¹⁾. Aber er sucht sich nun mit dieser Tatsache auf eine Weise abzufinden, die mit exakter Untersuchung nur noch wenig gemein hat.

6. Postulate in der Relationstheorie

Es ist eine oft gegen mathematische Beweise erhobene Einwendung, sie trafen nicht das Wesen der Sache. Schopenhauer nannte den üblichen Beweis für den Satz des Pythagoras eine Taschenspielererei und bewies ihn weseneseinsichtlich deswegen für das gleichzeitig rechtwinklige Dreieck; es ist allerdings leicht, anschaulich und übersichtlich zu bleiben, wenn man nur einfache Fragen behandelt. So ist es auch leicht, endlich viele Dinge systematisch zu ordnen. Aber ehe man die technischen Methoden der Mathematik zur Bewältigung des Unendlichen als unsystematisch tadelt, sollte man sie an der wirklich vorliegenden Problemlage messen. Dürfte ein Zahlentheoretiker meinen, er habe zum Primzahlenproblem einen wesentlichen Beitrag geliefert, weil er die Zahlen von 1 bis 100 auf Teilbarkeit geprüft und für die Zahlen größer als 100 ein Postulat über die Verteilung der Primzahlen aufgestellt hat, das sich überdies schon im Bereich von 100 bis 200 als falsch erwies? So ähnlich ist der Weg, den Geiger einschlägt, um den Schwierigkeiten des Unendlichen zu entgehen.

Der Begriff des Postulates für ein System von Relationen ist an sich durchaus einwandfrei. Ein Relationensystem läßt sich ja, wie wir in § 2, Nr. 5 z. B. hervor gehoben haben, durch einige seiner Eigenschaften beschreiben. Solche Beschreibungen nennt Geiger Postulate, und er drängt, völlig mit Recht, wie mir scheint, darauf, sie streng von den Axiomen selbst zu unterscheiden. So wären z. B. Forderungen wie: eine Relation solle transitiv sein oder sie solle symmetrisch sein, Postulate, aus denen dann die Axiome 3 und 4 von § 2, Nr. 4 gewonnen werden können.

Geiger versucht nun, die Axiome der projektiven Inzidenzrelation durch Postulate zu kennzeichnen²⁾. Er stellt zu diesem Zweck zunächst einige Postulate auf, aus denen sich die Axiome bis zur fünften Stufe ableiten lassen, dann aber

¹⁾ a. a. O., S. 107.

²⁾ a. a. O., S. 112—117.

postuliert er weiter, daß das so gewonnene System entscheidungsdefinit gemacht werden solle, indem die formal zugelassenen der Stufenzahl nach geordneten Sätze, die von den vorhergehenden unableitbar, „freie Möglichkeiten“ sind, als für alle Punkte, Geraden und Ebenen unmöglich gesetzt werden sollen.

Der Sinn dieses Postulates ist nicht präzise; ist ja doch die Anordnung der Sätze nach der Stufenzahl auf mannigfache Weise möglich. Dies hat zur Folge, daß sich, wie Geiger selbst zeigt, der Desarguessche Satz schon aus diesem Postulat keineswegs ableiten läßt. Und angenommen auch, das Postulat würde durch ein richtiges und exaktes ersetzt, indem etwa die Anordnung der Sätze genauer beschrieben würde; könnte man eine solche Eigenschaft der projektiven Axiome als etwas anderes als eine ganz äußerliche Merkwürdigkeit auffassen? Kann man mit solchem Postulat einen auf das Wesen der Sache gerichteten Erkenntniswillen befriedigen?

Doch diese Mängel sind nicht entscheidend. Entscheidend wichtig für die Förderung der Einsicht in exakte Methoden und exakte Ontologie ist aber dieses eine: Daß man sich nicht entschließen durfte, an festgelegte Sachverhalte Postulate zu stellen, statt sie zu erforschen, daß man das systematische Durchprüfen von unendlich vielen Sätzen nicht vereinfachen kann, indem man als Postulat formuliert, was sich vielleicht als Ergebnis herausstellen könnte, daß man also die Notwendigkeit einsieht, Widerspruchsfreiheitsbeweise für Axiome und Postulate zu erbringen. —

7. Abstrakte Gegenstände und Individuen

In diesem Abschnitt mögen zur Illustrierung der in § 2, Nr. 5 angedeuteten weiteren Probleme der Relationstheorie noch einige kritische Bemerkungen über Geiger's Diskussion der „größer als“-Relation folgen.

Geiger meint, daß es für einen Bereich von mehr als drei Dingen nur eine eindeutige, asymmetrische, komplementäre, transitive Relation gäbe. Ein Beispiel für eine solche Relation ist die „größer als“-Relation $a > b$ im Bereich der Zahlen a, b . Es ist nämlich:

1. der Satz $a > b$ wahr oder falsch, wenn a und b verschiedene Zahlen sind (Eindeutigkeit)¹⁾.
2. Ist $a > b$ wahr, so ist $b > a$ nicht immer richtig. (Asymmetrie.)
3. Ist $a > b$ wahr, so ist $b > a$ falsch und umgekehrt. (Komplementarität.)
4. Ist $a > b$ und $b > c$, so ist auch $a > c$. (Transitivität.)

Eine Relation, meint also Geiger, sei durch diese Eigenschaften völlig bestimmt, wenn es überdies noch mindestens vier Dinge gibt, für die die Relation erklärt ist, und zwei Dingbereiche, meint er weiter, welche zwei solchen zunächst als verschieden gedachten Relationen genügen, ließen sich wegen der formalen Identität dieser beiden Relationen eineindeutig aufeinander abbilden. Die Dinge dieser Bereiche seien nämlich durch die Relation linear geordnet und deswegen beide auf die ebenso angeordneten Punkte einer Geraden eineindeutig beziehbar²⁾. Im Gegensatz dazu sei aber eine symmetrische transitive Relation durch diese beiden Eigenschaften noch nicht vollständig bestimmt³⁾, wie ja auch das in § 2, Nr. 4 behandelte Beispiel der Identität im Bereich von zwei Dingen ohne weiteres zeigt.

Nun sieht man aber sofort, daß man eine „größer als“-Relation mit allen geforderten Eigenschaften z. B. 1. für die ersten 10 ganzen Zahlen, 2. für alle positiven ganzen Zahlen, 3. für alle positiven und negativen ganzen Zahlen, 4. für alle rationalen Zahlen und 5. für die reellen Zahlen erklären kann. Man sieht ohne Mühe, daß die „größer als“-Relationen in den ersten vier Bereichen formal ganz verschiedene Relationen sind, obgleich sie alle die Eigenschaften 1 bis 4 besitzen. Für die beiden letzten Bereiche erhält man allerdings dieselbe Relation, aber wie man sieht, folgt daraus keineswegs, daß sich die Bereiche selbst aufeinander eineindeutig abbilden ließen. Diese letztere Bemerkung ist tieferliegend, und um ihretwillen wurden diese Ausführungen gemacht. Fassen wir diesen Sachverhalt noch einmal ins Auge.

¹⁾ Wie man an diesem Axiom sieht, handelt es sich hier genau genommen um ein System mit den zwei Relationen $a > b$ und $a = b$.

²⁾ a. a. O., S. 202.

³⁾ a. a. O., S. 243.

Es ist durchaus unrichtig anzunehmen, daß zwei Dingbereiche sich deswegen eineindeutig aufeinander abbilden ließen, weil in beiden Bereichen eine entscheidungsdefinite Relation erklärt ist, die formal dieselbe Relation ist. Manchmal ist es der Fall, manchmal nicht. Besitzt in einem Bereich eine Relation dieselben Eigenschaften wie die „größer als“-Relation im Bereich der ganzen Zahlen, so ist dieser Bereich auf die ganzen Zahlen abbildbar; denn es gibt in ihm gerade ein kleinstes Ding und zu jedem gerade ein nächst größeres. Besitzt ein Bereich aber eine Relation, die formal mit der „größer als“-Relation der rationalen Zahlen übereinstimmt, so braucht er sich nicht auf die rationalen Zahlen abbilden zu lassen.

Wir gewinnen hier eine Möglichkeit, die Erklärung des bedeutungsleeren Begriffes durch die Erklärung des „abstrakten Gegenstandes“ zu ergänzen; wir meinen damit die Dinge eines Bereiches, für den ein solches System von Relationen erklärt ist, daß die eineindeutige Abbildbarkeit des Bereiches auf jeden anderen mit demselben Relationensystem gewährleistet wird. Die ganzen Zahlen sind also durch ihre „größer als“-Relation als Gegenstände gekennzeichnet; alle weiteren Eigenschaften der Zahlen lassen sich aus der Eins und dem Begriff des Nachfolgers erklären¹⁾.

Man kann ferner Bereiche, die sich auf sich selbst abbilden lassen, unterscheiden von Bereichen, bei denen dies nicht der Fall ist, die sozusagen aus abstrakten Individuen bestehen (die ganzen Zahlen). Diesen abstrakten Gegenständen und abstrakten Individuen kommt natürlich keine Existenz in dem Sinne wie den konkreten Zeichen zu.

Aus Gründen, ähnlich denen, die zu der Existenz verschiedener linear geordneter Bereiche führen, gibt es auch verschiedene Bereiche projektiver Punkte, Geraden und Ebenen, in denen der Desarguessche und der Pascalsche Satz gilt. Überdies ist die Inzidenzrelation durch ihre elementaren Eigenschaften und diese beiden Sätze durchaus nicht entscheidungsdefinit erklärt, wie Geiger zu

¹⁾ Aber natürlich nicht folgern. Es gibt unendlich viele Relationensysteme, die eine mit obiger „größer als“-Relation formal identische enthalten.

meinen scheint¹⁾. Aber das zu erörtern, würde zu tief in die Geometrie hineinführen.

8. Geigers Wesensaxiomatik

Wenden wir uns zum Schluß zur Ergänzung von Nr. 4 dieses Paragraphen noch Geigers Wesensaxiomatik²⁾ und der in ihr ausgedrückten so typischen, etwas anspruchsvollen Kritik an der Mathematik zu. Die Symbolik, so wird gefordert, solle das Wesen der Gegenstände, ihrer Relationen und der Zusammenhänge dieser Relationen widerspiegeln. Es dürfe also z. B. nicht aus „a größer als b“ wesensmäßig „b kleiner als a“ gefolgert werden, weil beide Sätze denselben Tatbestand schildern, der Folgerung des einen Satzes aus dem anderen also im Bereich der Gegenstände und ihrer Relationen nichts entspricht. Es soll überhaupt niemals ein Tatbestand mit dem logischen Worte „folgt“ geschildert werden, weil das „folgt“ einen nichtwesensmäßigen Richtungssinn in diesen Tatbestand hineintrüge und man Tatbestände nur mit „und“ und „nicht“ schildern dürfe. Es soll aus den Anordnungsaxiomen nicht auf die Existenz unendlich vieler Punkte geschlossen und so ein Axiom über die Existenz unendlich vieler Punkte „technisch“ ausgemerzt werden, weil die Punkte wesensmäßig zuvor existieren müssen, ehe sie angeordnet werden können.

Aus diesen Gesichtspunkten, konsequent durchgebildet, ließe sich bald beweisen, daß alles Schreiben, Sprechen und Denken zu verbieten wäre; denn wesensmäßig einwandfrei läßt sich das gleichzeitige Bestehen zweier Sachverhalte p, q auch mit „und“ nicht ausdrücken: „ p und q “ bevorzugt p , „ q und p “ bevorzugt q und „ p und q und q und p “ bevorzugt wieder p , usw.

Die Kritik des „folgt“ führt den Wesenstheoretiker gerade zu der formalen Auffassung des „folgt“ als Wahrheitsfunktion, die sonst aus ähnlichen Gründen abgelehnt zu werden pflegt. Trotzdem ist die Geigersche Kritik des „folgt“

¹⁾ a. a. O., S. 163. Nach Hilbert folgen aus diesen beiden Sätzen „alle Schnittpunktssätze“ nur mit Hilfe der Anordnungsaxiome. Außerdem ist der Begriff „alle Schnittpunktssätze“ bei Hilbert und Geiger verschieden.

²⁾ a. a. O., S. 10 ff.

unhaltbar; die träumerische Intuition mag verschiedene Tatbestände gleichzeitig auffassen, scharfes Denken ist für alle Zeit an das lineare Nacheinander der Zeit gebunden. Wir müssen in jeden Tatbestand erst eine Richtung hineintragen, ehe wir ihn auffassen können, und viele Regeln der formalen Logik beruhen gerade darauf, daß die Gleichberechtigung verschiedener Richtungssinne festgestellt wird, z. B. wenn wir feststellen, daß „ p und q “ und „ q und p “ gleichbedeutend sind.

So trägt denn diese Wesensaxiomatik auch bedenkliche Früchte. Sie erkennt die Entfernung sofort als Größe, was formallogisch und relationstheoretisch sich nicht halten ließe. Sie entdeckt ferner eine Lagerrelation von zwei Punkten in der projektiven Ebene, die etwa besagen könnte: „Zwei Punkte a und b in dieser Reihenfolge bestimmen eine Gerade und eine Richtung auf ihr“, die aber doch nur eine Relation zwischen diesen zwei Punkten sein soll und die überdies allen Punkten zukommen soll. Erst allmählich wird aus dieser Lagerrelation das bekannte „vor, nach“ der euklidischen Geometrie (übrigens, und nicht, wie Geiger meint, der projektiven) auf einer gerichteten Geraden. Diese Lagerrelation verdankt ihre Existenz wohl der Befürchtung, durch die Festlegung eines Richtungssinnes auf einer Geraden etwas Subjektives in die geometrischen Tatbestände hineinzutragen. Aber wenngleich auch die beiden Richtungen einer Geraden gleichberechtigt sind, so muß doch erst eine Richtung als positive ausgewählt sein, ehe wir von einer Lagerrelation von zwei Punkten auf einer Geraden sprechen können.

So meine ich denn, daß die sog. wesensmäßige Kritik der technischen Methoden der Mathematik mehr auf ersten Eindrücken und Gefühlen beruht als auf exakten Untersuchungen der geometrischen Tatbestände und der Mittel für ihre Darstellung. Dieselben Denkgefühle sind es, welche das Verständnis für die Wesenseinsichten des Formalismus erschweren. Ich glaube, daß sie und alle ähnlichen Bedenken bei näherem Zusehen verschwinden, wie der Dunst des Horizontes im Fernglas. Möchte sich bald der Erkenntnistheoretiker finden, der sie systematisch zergliedert und der den Formalismus zu einer wohldurchdachten Philosophie ausbaut.